

**Cours de Master 1<sup>ère</sup> année**  
**Filière : Ingénierie Mathématique à Toulouse**

Approximation des équations aux dérivées partielles, 24h de cours,  
24h de TDs

Marie Hélène Vignal

Université Paul Sabatier, UPS,  
Institut de mathématiques de Toulouse, MIP,  
118 route de Narbonne,  
31 Toulouse cedex 9.

[mhvignal@math.univ-toulouse.fr](mailto:mhvignal@math.univ-toulouse.fr)



# Table des Matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>5</b>
1.1	Qu'est qu'une équation aux dérivées partielles ?	5
1.2	Classification des e.d.p.	5
1.3	Objectifs de ce cours	7
<b>2</b>	<b>Forme générale, exemple simple et propriétés importantes</b>	<b>9</b>
2.1	Forme générale	9
2.2	Un exemple simple en une dimension d'espace	10
2.2.1	Présentation du problème, existence et unicité	10
2.2.2	Propriétés importantes à retenir	12
2.2.3	Notion de formulation variationnelle	14
<b>3</b>	<b>Notions de base d'analyse fonctionnelle</b>	<b>15</b>
3.1	Les distributions	15
3.1.1	Définition et exemples	15
3.1.2	Convergence et dérivation dans l'espace des distributions $\mathcal{D}'(\Omega)$	17
3.2	Espaces de Sobolev d'ordre entier : $H^m(\Omega)$ , $m \in \mathbb{N}$	18
3.2.1	Définition et premières propriétés	18
3.2.2	Le cas particulier des fonctions de $H^1(\Omega)$ et $H^2(\Omega)$	20
3.2.2.1	Caractérisation des fonctions de $H^1(\Omega)$	21
3.2.2.2	Traces et formules de Green	23
3.2.3	Inégalités de Poincaré	26
3.3	Théorème de Lax-Milgram	27
<b>4</b>	<b>L'équation de Poisson en dimension <math>n \geq 2</math></b>	<b>29</b>
4.1	Conditions aux limites de Dirichlet homogène	29
4.1.1	Formulation variationnelle	29
4.1.2	Existence et unicité de la solution	31
4.2	Conditions aux limites de Dirichlet non homogène	32
4.2.1	Formulation variationnelle	32
4.2.2	Existence et unicité de la solution	33
4.3	Conditions aux limites de Neumann	35
4.4	Régularité et principe du maximum	36

<b>5</b>	<b>Approximation des problèmes elliptiques par éléments finis . . .</b>	<b>37</b>
5.1	Introduction, un exemple simple . . . . .	37
5.1.1	Méthodes de type différences finis . . . . .	38
5.1.2	Méthodes de type volumes finis . . . . .	39
5.1.3	Méthodes de type éléments finis . . . . .	40
5.2	Principes généraux d'approximation variationnelle . . . . .	40
5.3	Éléments finis de Lagrange en dimension une . . . . .	44
5.3.1	Éléments finis de degré 1 . . . . .	45
5.3.2	Éléments finis de degré 2 . . . . .	51
5.3.3	Élément finis de référence . . . . .	53
5.3.4	Conformité avec d'autres espaces . . . . .	53
5.3.5	Éléments finis de Lagrange de degré $k$ , résultats de convergence	54
5.4	Éléments finis de Lagrange en dimension deux ou trois . . . . .	56
5.4.1	Éléments finis $P_k$ . . . . .	57
5.4.1.1	Présentation . . . . .	57
5.4.1.2	Comment choisir les noeuds du maillage . . . . .	57
5.4.1.3	Calcul des fonctions de forme à l'aide d'un triangle de référence . . . . .	60
5.4.1.4	Assemblage de la matrice. . . . .	62
5.4.2	Éléments finis $Q_k$ . . . . .	64
5.4.3	Résultats de convergence et d'estimations d'erreurs dans le cadre général . . . . .	66
	<b>Bibliographie . . . . .</b>	<b>67</b>

## Chapitre 1

# Introduction

### 1.1 Qu'est qu'une équation aux dérivées partielles ?

Une équation aux dérivées partielles (e.d.p.) est une équation dont l'inconnue est une fonction et portant sur les dérivées partielles de cette fonction.

Si on note  $u : \mathbb{R}^n$  (ou  $\Omega$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$ )  $\rightarrow \mathbb{R}$  alors l'équation s'écrit sous

$$x \longmapsto u(x)$$

la forme

$$F(x, u(x), Du(x), D^2u(x), \dots, D^p u(x)) = 0,$$

avec  $n$  et  $p$  des entiers strictement positifs donnés et  $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n^2} \times \dots \times \mathbb{R}^{n^p}$  est une fonction donnée. L'entier  $p$  est appelé l'ordre de l'e.d.p.

Les e.d.p. proviennent de la modélisation mathématique, c'est à dire de la transcription en équations, de problèmes intervenant dans tous les domaines des sciences : physique, chimie, biologie, finance...

### 1.2 Classification des e.d.p.

On distingue trois grandes catégories d'équations aux dérivées partielles :

- Les équations de type elliptique dont le prototype est l'équation de Poisson donnée par

$$-\Delta u(x) = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x) = f(x),$$

pour tout  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ , où  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction donnée. L'inconnue est la fonction  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .

- Les équations de type parabolique dont le prototype est l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} - \Delta T(x, t) = 0,$$

pour tout  $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$  et  $t > 0$ . L'inconnue est la fonction  $T : \Omega \times ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ .

- Les équations de type hyperbolique dont les prototypes sont

- l'équation de transport

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

pour tout  $x \in \Omega \subset \mathbb{R}$ , tout  $t > 0$  et où  $a \in \mathbb{R}$  est donné.

- l'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0,$$

pour tout  $x \in \Omega \subset \mathbb{R}$  et tout  $t > 0$ .

Pourquoi les appellations elliptique, parabolique et hyperbolique ?

Au départ, elles proviennent du fait que si l'on considère une e.d.p. exactement d'ordre 2 (c'est à dire faisant intervenir des dérivées partielles d'ordre 2 et 1) à coefficients constants, du type

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} + f u = \text{second membre},$$

avec  $a, b, c, d, e$  et  $f$  dans  $\mathbb{R}$  donnés. Alors cette e.d.p. est dite

- elliptique si  $q(x, y) = a x^2 + b x y + c y^2 = -1$  est une ellipse.
- parabolique si  $q(x, y) = a x^2 + b x y + c y^2 = -1$  est une parabole.
- hyperbolique si  $q(x, y) = a x^2 + b x y + c y^2 = -1$  est une hyperbole.

Il est facile de vérifier cette propriété pour les équations de Poisson en dimension 2, de la chaleur et des ondes en dimension 1.

En effet, pour l'équation de Poisson en dimension 2, on a  $q(x, y) = -x^2 - y^2 = -1$ , qui est l'équation d'un cercle et donc d'une ellipse particulière. Pour l'équation de la chaleur en dimension 1, on a  $q(t, x) = t - x^2 = -1$ , qui est bien l'équation d'une parabole. Enfin, pour l'équation des ondes en dimension 1, on a  $q(t, x) = t^2 - x^2 = -1$ , qui est bien une hyperbole.

Les appellations elliptique, parabolique et hyperbolique s'étendent pour les autres e.d.p. lorsqu'elles s'apparentent aux équations de la forme précédente. En particulier, c'est le cas pour l'équation de transport. En effet en posant dans l'équation des ondes  $\phi_0 = \partial u / \partial t$  et  $\phi_1 = -\partial u / \partial x$ , on obtient

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi_0}{\partial t} + \frac{\partial \phi_1}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \frac{\partial \phi_0}{\partial x} = 0, \end{cases}$$

ce qui s'écrit encore

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

et en notant  $U$  le vecteur  $(\phi_0, \phi_1)$  et  $A$  la matrice, on obtient une généralisation bidimensionnelle de l'équation de transport

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} = 0.$$

Ceci explique l'appellation hyperbolique pour l'équation de transport.

Enfin, pour conclure, des équations du même type nécessite des outils mathématiques similaires, d'où l'envie de regrouper ceux qui se ressemblent...

### 1.3 Objectifs de ce cours

Le but de ce cours est d'étudier la classe particulière des équations elliptiques linéaires d'ordre 2. Nous nous intéresserons tout d'abord au problème continu. En particulier, nous montrerons des résultats d'existence et d'unicité de solutions. N'ayant que 24 heures de cours nous ne ferons qu'évoquer les résultats de régularité de la solution ainsi que ses propriétés qualitatives (ex : positivité, continuité par rapport aux données du problème,...).

Bien évidemment, la modélisation de problèmes pratiques conduit à des systèmes d'e.d.p. bien plus complexes que celles citées ci dessus. En général pour celles-ci, on ne sait pas montrer de résultats d'existence et d'unicité de solutions.

Enfin, bien qu'on sache que la solution d'une équation elliptique linéaire d'ordre 2 existe et soit unique, il n'est pas possible, en général, de la déterminer de manière explicite. Nous verrons sur un exemple simple, les différentes techniques existantes pour calculer une approximation de ces solutions. Enfin, nous étudierons en détails les techniques d'éléments finis qui permettent d'obtenir explicitement une approximation de la solution d'une équations elliptiques linéaires. Nous donnerons le principe de la méthode ainsi que des résultats de convergence de la méthode.

Je termine cette introduction par une bibliographie pour ce cours.

Pour des questions de base liées à l'analyse fonctionnelle, on pourra se référer au livre de H. Brezis [1]. Pour la théorie sur les problèmes elliptiques, on pourra commencer par ce même livre [1], puis celui de P.A. Raviart et J.M. Thomas [7], enfin pour les très curieux qui voudront aborder des questions plus pointues ils pourront utiliser le livre de J.L. Lions et E. Magenes [5]. Enfin, pour plus de détails sur les techniques éléments finis, on pourra se référer aux livre de P.A. Raviart et J.M. Thomas [7], de J.C. Nedelec [6], de A Ern et J.L. Guermond [4] et de G. Dhatt et G. Touzot [3].





## Chapitre 2

# Forme générale, exemple simple et propriétés importantes

### 2.1 Forme générale

On se donne  $\Omega$  un ouvert quelconque de  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 1$ ), une matrice  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  de taille  $n \times n$  dont les coefficients  $a_{ij} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  sont des fonctions de  $L^\infty(\Omega)$  et une fonction  $a_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  dans  $L^\infty(\Omega)$ .

On considère alors l'opérateur  $\mathcal{L}$  défini par

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u(x) &= -\operatorname{div}\left(A(x) \nabla u(x)\right) + a_0(x) u(x) \\ &= -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \right) + a_0(x) u(x), \end{aligned} \quad (2.1)$$

pour presque tout  $x \in \Omega$ .

On suppose qu'il existe  $\alpha_0 \geq 0$  tel que

$$a_0(x) \geq \alpha_0, \quad \text{pour presque tout } x \in \Omega. \quad (2.2)$$

**Définition 1** On dit que  $\mathcal{L}$  est (uniformément) elliptique s'il existe  $\alpha > 0$  telle que

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha \|\xi\|_2^2,$$

pour presque tout  $x \in \Omega$  et  $\forall \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$  et où  $\|\cdot\|_2$  est la norme euclidienne de  $\mathbb{R}^n$ .

L'exemple le plus classique est celui du laplacien

$$\mathcal{L}u(x) = -\Delta u(x) = -\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x) - \dots - \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}(x),$$

pour tout  $x \in \Omega$ .

Dans ce cas,  $A$  est la matrice identité de taille  $n$  et donc  $a_{ii} = 1$  pour tout  $i = 1, \dots, n$  et  $a_{ij} = 0$  pour tout  $i, j = 1, \dots, n$  tels que  $i \neq j$ , on note  $a_{ij} = \delta_{ij}$  pour tout  $i, j$ .

Remarquons que

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j = \sum_{i=1}^n \xi_i^2 = \|\xi\|_2^2,$$

on peut donc choisir  $\alpha = 1$ .

Dans ce cours, nous traiterons principalement l'exemple du laplacien avec divers conditions aux limites. En effet, le cas général (2.1) se traite de manière identique comme nous le verrons en travaux dirigés.

## 2.2 Un exemple simple en une dimension d'espace

### 2.2.1 Présentation du problème, existence et unicité

On commence par regarder un exemple très simple en dimension une, afin de bien comprendre les propriétés caractéristiques des équations elliptiques (linéaires d'ordre 2).

On considère l'équation de Poisson en dimension une avec conditions aux limites de Dirichlet homogène.

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), & \forall x \in ]0, 1[ \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \quad (2.3)$$

où  $f \in C([0, 1])$  est donnée.

**Remarque 1** 1. *Le problème (2.3) n'est pas une équation aux dérivées partielles mais une équation différentielle ordinaire. Remarquons toutefois qu'on ne peut pas utiliser le théorème de Cauchy-Lipschitz pour montrer l'existence et l'unicité d'une solution. En effet, ce n'est pas un problème de Cauchy. On rappelle que cette équation d'ordre 2 est équivalente au système d'ordre 1 suivant*

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c(x) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -f \end{pmatrix}, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

*Ainsi, le problème de Cauchy consisterait à se donner  $u$  et  $u'$  à "l'instant initial"  $x = 0$ .*

2. *Les conditions aux limites  $u(0) = u(1) = 0$  sont dites de Dirichlet homogène : Dirichlet car on impose la valeur de la fonction au bord (on pourrait par exemple imposer la valeur de  $u'$ ) et homogène car la valeur imposée est 0.*

**Proposition 1** *Pour tout  $f \in C([0, 1])$ , il existe un unique  $u \in C^2([0, 1])$  solution (classique) de (2.3) et donnée par*

$$u(x) = \int_0^1 G(x, y) f(y) dy, \quad \forall x \in [0, 1], \tag{2.4}$$

où  $G$  s'appelle la fonction de Green du problème et est définie par

$$G(x, y) = \begin{cases} y(1-x), & \text{si } 0 \leq y \leq x, \\ x(1-y), & \text{si } x \leq y \leq 1. \end{cases}$$

**Preuve :** Faite en travaux dirigés

On montre tout d'abord l'existence. Pour cela on peut procéder de deux façons : soit on intègre deux fois l'équation, soit on montre directement que l'expression (2.4) est solution de (2.3). Ici, on montre que (2.4) est solution de (2.3).

Soit  $u$  donnée par (2.3), alors pour tout  $x \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx}(x) &= \frac{d}{dx} \left( \int_0^1 G(x, y) f(y) dy \right) = \frac{d}{dx} \left( \int_0^x y(1-x) f(y) dy + \int_x^1 x(1-y) f(y) dy \right), \\ &= x(1-x) f(x) - \int_0^x y f(y) dy - x(1-x) f(x) + \int_x^1 (1-y) f(y) dy, \\ &= \int_x^1 f(y) dy - \int_0^x y f(y) dy. \end{aligned}$$

Notons déjà que  $u \in C^1([0, 1])$ , et

$$\frac{d^2u}{dx^2}(x) = -f(x),$$

donc  $u \in C^2([0, 1])$  et est solution de (2.3). Ceci montre l'existence.

Pour montrer l'unicité, on remarque que le problème étant linéaire, il suffit de montrer que si  $f \equiv 0$  la seule solution de (2.3) est la fonction nulle. En effet, si  $u_1$  et  $u_2$  sont deux solutions de (2.3) pour  $f$  donnée, alors

$$\begin{cases} -\frac{d^2}{dx^2}(u_1 - u_2)(x) = 0, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Pour montrer que la seule solution pour  $f = 0$ , est la fonction nulle, on montre que toute solution de (2.3) s'écrit sous la forme (2.4). En effet, pour tout  $x \in [0, 1]$

$$\int_0^1 G(x, y) 0 dy = 0.$$

Soit donc  $u$  solution de (2.3), en intégrant deux fois, on obtient

$$u(x) = - \int_0^x \int_0^s f(y) dy ds + ax + b,$$

avec  $a, b$  dans  $\mathbb{R}$  déterminées par les conditions aux limites  $u(0) = u(1) = 0$ .

On obtient  $b = 0$  et

$$a = \int_0^1 \int_0^s f(y) dy ds.$$

D'où, pour tout  $x \in [0, 1]$

$$u(x) = x \int_0^1 \int_0^s f(y) dy ds - \int_0^x \int_0^s f(y) dy ds$$

On utilise alors le théorème de Fubini afin de calculer l'intégrale en la variable  $s$ .

On obtient alors

$$\begin{aligned} u(x) &= x \int_0^1 \int_y^1 f(y) ds dy - \int_0^x \int_y^x f(y) ds dy, \\ &= \int_0^1 x(1-y) f(y) dy - \int_0^x f(y)(y-x) dy, \\ &= \int_0^1 (x(1-y) + \chi_{[0,x]}(y)(1-y)) f(y) dy, \end{aligned}$$

où  $\chi_{[0,x]}$  est la fonction caractéristique de l'intervalle  $[0, x]$  donnée par

$$\chi_{[0,x]}(y) = \begin{cases} 1, & \text{si } y \in [0, x], \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit  $G : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $G(x, y) = x(1-y) - (x-y)\chi_{[0,x]}(y)$  pour tout  $(x, y) \in [0, 1]^2$ , alors si  $y \in [0, x]$ ,  $G(x, y) = x(1-y) - (x-y) = y(1-x)$  et si  $y \in ]x, 1]$  alors  $G(x, y) = x(1-y)$ .

Ceci termine la démonstration de la Proposition 1.

### 2.2.2 Propriétés importantes à retenir

De l'expression (2.4), nous allons déduire plusieurs propriétés qui sont caractéristiques des solutions de problèmes elliptiques.

Tout d'abord, les équations elliptiques sont régularisantes. En effet

**Propriété 1** Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$f \in C^k([0, 1]) \Rightarrow u \in C^{k+2}([0, 1]).$$

La preuve de ce résultat est évidente puisque  $u'' = -f$ .

La deuxième propriété est que la solution dépend de manière continue du paramètre (ou de la donnée)  $f$ . C'est à dire

**Propriété 2** La fonction

$$\begin{aligned} T : C([0, 1]) &\longrightarrow C^2([0, 1]) \\ f &\longmapsto u \text{ solution de (2.3)} \end{aligned}$$

est linéaire et continue. On a

$$\|u\|_{C^2([0,1])} \leq 4 \|f\|_{C([0,1])}.$$

**Preuve :** Pour tout  $f$  et  $g$  dans  $C([0, 1])$  on note  $u_f$  et  $u_g$  les solutions de (2.3) avec seconds membres respectifs  $f$  et  $g$ . Soient  $\lambda$  et  $\mu$  dans  $\mathbb{R}$ , alors la solution de (2.3) avec second membre  $\lambda f + \mu g$  est donnée par  $\lambda u_f + \mu u_g$  puisque  $-(\lambda u_f + \mu u_g)'' = -\lambda u_f'' - \mu u_g'' = \lambda f + \mu g$  de plus  $\lambda u_f(0) + \mu u_g(0) = \lambda u_f(1) + \mu u_g(1) = 0$ .

Ainsi,  $T$  est linéaire, et pour montrer que  $T$  est continue, il suffit donc de montrer qu'il existe  $C$  telle que pour tout  $f$  dans  $C([0, 1])$ ,

$$\|T(f)\|_{C^2([0,1])} = \|u\|_{C^2([0,1])} \leq C \|f\|_{C([0,1])},$$

où  $u = T(f)$  est la solution de (2.3) et où l'on rappelle que

$$\|f\|_{C([0,1])} = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| \quad \text{et} \quad \|u\|_{C^2([0,1])} = \|u\|_{C([0,1])} + \|u'\|_{C([0,1])} + \|u''\|_{C([0,1])}.$$

Or, d'après la Proposition 1, pour tout  $x \in [0, 1]$ , on a

$$\begin{aligned} |u(x)| &= \left| \int_0^1 G(x, y) f(y) dy \right| \leq \left| \int_0^x y(1-x) f(y) dy \right| + \left| \int_x^1 x(1-y) f(y) dy \right|, \\ &\leq \int_0^x |f(y)| dy + \int_x^1 |f(y)| dy \leq \|f\|_{C([0,1])} \int_0^1 dy = \|f\|_{C([0,1])}. \end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned} |u'(x)| &= \left| x(1-x) f(x) - \int_0^x y f(y) dy - x(1-x) f(x) - \int_0^1 y f(y) dy \right|, \\ &= \left| \int_x^1 f(y) dy - \int_0^1 y f(y) dy \right| \leq \int_x^1 |f(y)| dy + \int_0^1 |f(y)| dy \leq 2 \|f\|_{C([0,1])}, \end{aligned}$$

et

$$|u''(x)| = |f(x)| \leq \|f\|_{C([0,1])}.$$

On a donc

$$\|u\|_{C^2([0,1])} \leq 4 \|f\|_{C([0,1])}.$$

Enfin la dernière propriété que nous donnerons, s'appelle le principe du maximum et se résume en la propriété suivante

**Propriété 3 (Principe du maximum)** Soient  $f \in C([0, 1])$  et  $u$  solution de (2.3), alors

$$f \leq 0 \Rightarrow u \leq 0.$$

**Preuve :**

On suppose  $f(x) \leq 0$  pour tout  $x \in [0, 1]$ . Remarquons alors que  $G(x, y) \geq 0$  pour tout  $x, y$  dans  $[0, 1]$ . Ainsi, pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $u(x)$  est l'intégrale d'une fonction négative et est donc négative.

On montre alors facilement le résultat suivant

**Corollaire 1** Soient  $f \in C([0, 1])$  et  $u$  solution de (2.3), alors

$$f \geq 0 \Rightarrow u \geq 0.$$

**Preuve :**

Il suffit de remarquer que si  $u$  est solution de (2.3) alors  $-u$  est solution de

$$\begin{cases} -(-u)''(x) = -f(x), & \forall x \in ]0, 1[ \\ -u(0) = -u(1) = 0. \end{cases}$$

D'après le principe du maximum (Propriété 3), on a alors

$$-f \leq 0 \Rightarrow -u \leq 0,$$

soit le résultat.

**2.2.3 Notion de formulation variationnelle**

On rappelle que la solution du problème

$$-u''(x) = f(x), \quad \forall x \in ]0, 1[, \quad (2.5)$$

$$u(0) = u(1) = 0, \quad (2.6)$$

est donnée par

$$u(x) = \int_0^1 G(x, y) f(y) dy, \quad \forall x \in [0, 1], \quad (2.7)$$

avec

$$G(x, y) = \begin{cases} y(1-x), & \text{si } 0 \leq y \leq x, \\ x(1-y), & \text{si } x \leq y \leq 1. \end{cases}$$

Notons alors que pour que (2.5) ait un sens, on doit avoir  $u \in C^2(]0, 1[)$  (ce qui impose  $f \in C(]0, 1[)$ ) et pour que (2.6) aient un sens, on doit avoir  $u \in C([0, 1])$ . Ainsi, la formulation classique du problème elliptique (2.5), (2.6) est :

Trouver  $u \in C^2(]0, 1[) \cap C([0, 1])$  tel que (2.5), (2.6) soient satisfaites.

Malheureusement, cette vision classique ne suffit pour décrire la réalité physique. En effet, dans beaucoup de problèmes pratiques, on est amené à considérer des quantités non régulières, comme par exemple pour décrire la rupture d'un barrage, le freinage d'une voiture...

Remarquons de plus, que l'expression (2.7) de la solution ne nécessite pas autant de régularité sur  $f$  pour avoir un sens. En particulier, si  $f \in L^p(]0, 1[)$  pour  $p \in [1, +\infty]$ , cette expression est bien définie. Mais en quel sens l'équation est elle alors satisfaite ? Nous verrons dans le cas général qu'elle est satisfaite au sens des distributions. De plus, remarquons que si  $f \in L^p(]0, 1[)$  alors comme  $u'' = -f$  au sens des distributions, on a alors  $u'' \in L^p(]0, 1[)$  ce qui nous amène naturellement à nous placer dans le cadre des espaces de Sobolev.

C'est pourquoi, dans le chapitre suivant, je vais commencer par quelques résultats d'analyse fonctionnelle qui nous seront utiles pour traiter le cas de l'équation de Poisson en dimension plus grande que 1.

## Chapitre 3

# Notions de base d'analyse fonctionnelle

### 3.1 Les distributions

#### 3.1.1 Définition et exemples

**Définition 2** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$ , on note  $\mathcal{D}(\Omega)$  ou  $C_c^\infty(\Omega)$  l'espace des fonctions à valeurs réelles, infiniment dérivables sur  $\Omega$  et à support compact contenu dans  $\Omega$ .

Pour  $K \subset \Omega$  compact, on note  $C_K^\infty(\Omega)$  l'ensemble des fonctions de  $C_c^\infty(\Omega)$  à support dans  $K$ .

Les fonctions de  $\mathcal{D}(\Omega)$  sont appelées les fonctions test.

**Définition 3** On dit que  $u$  est une distribution (réelle) dans l'ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ( $n \geq 1$ ) si  $u$  est une forme linéaire sur  $\mathcal{D}(\Omega)$  :

$$\begin{aligned} u : \mathcal{D}(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\mapsto u(\varphi) =: \langle u, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} =: \langle u, \varphi \rangle, \end{aligned}$$

qui vérifie la propriété de continuité suivante :

Pour tout  $K \subset \Omega$  compact, il existe  $A_K \geq 0$  et  $p \in \mathbb{N}$  tels que

$$|\langle u, \varphi \rangle| \leq A_K \sup_{x \in K, |\alpha| \leq p} |\partial^\alpha \varphi(x)|,$$

pour tout  $\varphi \in C_K^\infty(\Omega)$  et où pour tout  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$  et tout  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  (multi-entier)

$$\partial^\alpha \varphi(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}(x),$$

avec  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ .

On note  $\mathcal{D}'(\Omega)$  l'espace (vectoriel) des distributions dans  $\Omega$ .

**Exemples importants :**

**Exemple 1 :** On définit la distribution (ou mesure) de Dirac en un point  $a \in \mathbb{R}^n$ , de la manière suivante :

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)} = \varphi(a),$$

pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ .

Cette application est bien linéaire en  $\varphi$  de plus, elle vérifie la propriété de continuité. En effet, pour tout  $K \subset \mathbb{R}^n$  compact, on a

$$|\langle \delta_a, \varphi \rangle| = \varphi(a) \leq \sup_{x \in K} |\varphi(x)|,$$

pour toute fonction  $\varphi \in C_K^\infty(\Omega)$ .

On peut montrer qu'il n'existe pas  $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  tel que  $\delta_a \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^n)$ .

**Exemple 2 :** L'exemple nous intéressant le plus dans ce cours est celui des fonctions localement sommables  $L_{loc}^1(\Omega)$  (qui contient  $L^1(\Omega)$ ). Je rappelle que

$$L_{loc}^1(\Omega) = \left\{ f \in L^1(K) ; \text{ pour tout } K \subset \Omega \text{ compact} \right\}.$$

Pour toute fonction  $f$  de  $L_{loc}^1(\Omega)$ , on définit une distribution associée, encore notée  $f$  (nous verrons pourquoi on peut faire cet abus de notation), par

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx, \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Cette application est bien linéaire en  $\varphi$  de plus elle vérifie la propriété de continuité puisque pour tout  $K \subset \Omega$  compact, on a

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq \sup_{x \in K} |\varphi(x)| \int_K |f(x)| dx,$$

pour toute fonction  $\varphi \in C_K^\infty(\Omega)$ .

L'utilisation de la même notation est possible car si deux fonctions sont égales dans  $L_{loc}^1(\Omega)$ , elles sont égales presque partout et donc définissent la même distribution. Réciproquement si deux distributions, associées à des fonctions de  $L_{loc}^1(\Omega)$ , sont identiques alors les deux fonctions sont égales presque partout et donc dans  $L_{loc}^1(\Omega)$ . Ceci se démontre grâce au résultat suivant

**Théorème 1** Soit  $f \in L_{loc}^1(\Omega)$  où  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 1$ ) alors

$$\int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \Leftrightarrow f = 0 \text{ presque partout dans } \Omega.$$

**Remarque 2** Notons pour terminer que toute fonction de  $L^2(\Omega)$  est une fonction de  $L_{loc}^1(\Omega)$  grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz. En effet pour toute fonction  $f \in L^2(\Omega)$  et pour tout  $K \subset \Omega$  compact, on a

$$\int_K |f(x)| dx \leq \left( \int_K 1 dx \right)^{1/2} \left( \int_K |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \leq \sqrt{|K|} \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$



**3.1.2 Convergence et dérivation dans l'espace des distributions  $\mathcal{D}'(\Omega)$**

On commence par définir la notion de convergence dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$ .

**Définition 4 (convergence dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$ )** *On dit qu'une suite de distributions  $(u_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$  converge vers  $u$  dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$ , si pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$*

$$\langle u_j, \varphi \rangle \longrightarrow \langle u, \varphi \rangle \text{ dans } \mathbb{R} \text{ lorsque } j \rightarrow +\infty.$$

**Remarque 3 (importante)** *Il y a unicité de la limite dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$ . En effet, ceci découle de l'unicité de la limite dans  $\mathbb{R}$ , si  $u_j \rightarrow u_1$  et  $u_j \rightarrow u_2$  dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$  alors  $\langle u_j, \varphi \rangle \longrightarrow \langle u_1, \varphi \rangle = \langle u_2, \varphi \rangle$ , pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  et donc  $u_1 = u_2$  dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$ .*

**Définition 5 (Dérivation dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$ )** *Soit  $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ , on note  $\partial u / \partial x_i$  la distribution définie par*

$$\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi \rangle = - \langle u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle,$$

pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ .

$\partial u / \partial x_i$  est la dérivée partielle au sens des distributions de  $u$  par rapport à  $x_i$ .

**Remarque 4** *Nous verrons en travaux dirigés que la dérivée d'une fonction régulière coïncide avec sa dérivée au sens des distributions.*

**Exemples de calcul de dérivées dans les distributions:**

Exemple 1: On considère la fonction de Heaviside, définie par

$$H(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0, \\ 1, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette fonction est clairement dans  $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ . Cette fonction n'est pas dérivable sur  $\mathbb{R}$  puisque qu'elle est discontinue en 0. Calculons sa dérivée au sens des distributions.

Soit  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ , on a par définition de la dérivée au sens des distributions

$$\langle H', \varphi \rangle = - \langle H, \varphi' \rangle = - \int_{\mathbb{R}} H(x) \varphi'(x) dx = - \int_0^{+\infty} \varphi'(x) dx.$$

Soit  $a > 0$ , tel que  $\text{supp}(\varphi) \subset [-a, a]$ , alors

$$\langle H', \varphi \rangle = - \int_0^a \varphi'(x) dx = - (\varphi(a) - \varphi(0)) = \varphi(0),$$

car  $\varphi(a) = 0$ . Ainsi

$$\langle H', \varphi \rangle = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle,$$

et

$$H' = \delta_0,$$

dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ .

Plus généralement, on montre le résultat suivant.

**Théorème 2** Soit  $a = a_0 < a_1 < \dots < a_p < a_{p+1} = b$ ,  $p + 2$  réels ordonnés, on considère  $u : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^1$  sur chaque intervalle  $[a_i, a_{i+1}]$  pour  $i = 0, \dots, p$ .

Alors pour tout  $i = 1, \dots, p$ , les limites

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} u(a_i + \varepsilon) := u(a_i + 0), \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} u(a_i - \varepsilon) := u(a_i - 0),$$

sont finies. La fonction  $u$  est dans  $L^1_{loc}(]a, b[)$  et sur chaque intervalle  $]a_i, a_{i+1}[$  pour  $i = 0, \dots, p$  sa dérivée au sens classique, notée  $v_i$  existe et est dans  $L^1_{loc}(]a_i, a_{i+1}[)$ .

De plus, sa dérivée au sens des distributions est donnée par la formule suivante, appelée formule des sauts

$$u' = \sum_{i=0}^p \mathbb{I}_{]a_i, a_{i+1}[} v_i + \sum_{i=1}^p \left( u(a_i + 0) - u(a_i - 0) \right) \delta_{a_i},$$

où  $\mathbb{I}_{]a_i, a_{i+1}[}(x) = 1$  si  $x \in ]a_i, a_{i+1}[$ , et 0 sinon.

On termine par un résultat de continuité de la dérivation dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$

**Théorème 3 (Continuité de la dérivée au sens des distributions)**

Si une suite  $(u_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$  converge vers  $u$  dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$  où  $\Omega$  désigne un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 1$ ), alors pour tout  $p \in \mathbb{N}$  et tout  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  tel que  $|\alpha| \leq p$

$$\partial^\alpha u_j \rightarrow \partial^\alpha u \quad \text{lorsque} \quad j \rightarrow +\infty \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega).$$

**Preuve :**

Pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ , on a

$$\langle \partial^\alpha u_j, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u_j, \partial^\alpha \varphi \rangle \longrightarrow (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha \varphi \rangle = \langle \partial^\alpha u, \varphi \rangle .$$

**3.2 Espaces de Sobolev d'ordre entier :  $H^m(\Omega)$ ,  $m \in \mathbb{N}$**

Pour plus de résultats sur les espaces de Hilbert, on pourra se reporter au livre de H. Brezis [1].

**3.2.1 Définition et premières propriétés**

**Définition 6** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 1$ ),  $m \in \mathbb{N}$ , on dit que  $u \in H^m(\Omega)$  si  $u \in L^2(\Omega)$  et si toutes ses dérivées, au sens des distributions, jusqu'à l'ordre  $m$  sont encore dans  $L^2(\Omega)$ .

$$H^m(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) ; \forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n \text{ avec } |\alpha| \leq m \text{ on a } \partial^\alpha u \in L^2(\Omega) \right\},$$

avec

$$\partial^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

et  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$ .

**Théorème 4** *Muni du produit scalaire*

$$(u, v)_m = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| \leq m}} \int_{\Omega} \partial^\alpha u(x) \partial^\alpha v(x) dx, \quad \text{pour tout } u, v \text{ dans } H^m(\Omega),$$

*l'espace  $H^m(\Omega)$  est un espace de Hilbert.*

**Preuve :**

Un espace de Hilbert est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire (espace préhilbertien) qui est complet (toute suite de Cauchy converge dans l'espace) pour la norme associée au produit scalaire.

L'espace  $H^m(\Omega)$  est clairement préhilbertien, montrons qu'il est complet pour la norme

$$\|u\|_{H^m(\Omega)}^2 = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| \leq m}} \int_{\Omega} |\partial^\alpha u(x)|^2 dx.$$

Soit  $(u_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset H^m(\Omega)$  une suite de Cauchy. Alors  $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy dans  $L^2(\Omega)$  et pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  tel que  $1 \leq |\alpha| \leq m$ ,  $(\partial^\alpha u_j)_{j \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy dans  $L^2(\Omega)$ .

Mais  $L^2(\Omega)$  est complet, donc il existe  $u \in L^2(\Omega)$  et  $u_\alpha \in L^2(\Omega)$  pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  tel que  $1 \leq |\alpha| \leq m$ , tels que

$$\begin{aligned} u_j &\longrightarrow u, & \text{dans } L^2(\Omega), \\ \partial^\alpha u_j &\longrightarrow u_\alpha, & \text{dans } L^2(\Omega) \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ tel que } 1 \leq |\alpha| \leq m. \end{aligned}$$

Il reste à montrer que  $u_\alpha = \partial^\alpha u$ . Pour cela, on commence par utiliser la continuité de l'injection canonique de  $L^2(\Omega)$  dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$ . En effet, pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ , d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} \langle u_j - u, \varphi \rangle &\leq \|\varphi\|_\infty \sqrt{|\Omega|} \|u_j - u\|_{L^2(\Omega)}, \\ \langle \partial^\alpha u_j - u_\alpha, \varphi \rangle &\leq \|\varphi\|_\infty \sqrt{|\Omega|} \|\partial^\alpha u_j - u_\alpha\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  tel que  $1 \leq |\alpha| \leq m$ . Et donc

$$\begin{aligned} u_j &\longrightarrow u, & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \\ \partial^\alpha u_j &\longrightarrow u_\alpha, & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ tel que } 1 \leq |\alpha| \leq m. \end{aligned}$$

Mais la dérivation dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$  est continue, et ainsi

$$\partial^\alpha u_j \longrightarrow \partial^\alpha u, \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ tel que } 1 \leq |\alpha| \leq m.$$

Par unicité de la limite dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$ , on obtient

$$u_\alpha = \partial^\alpha u, \quad \text{pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ tel que } 1 \leq |\alpha| \leq m,$$

dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$  et donc dans  $L^2(\Omega)$  puisque  $u_\alpha \in L^2(\Omega)$ .

Et donc,

$$u_j \longrightarrow u, \quad \text{dans } H^m(\Omega).$$

Ce qui termine la démonstration.

**Théorème 5**  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  est dense dans  $H^m(\mathbb{R}^n)$ .

**Preuve :** Voir feuille de TD master 1 fondamental, pas au programme en IMAT.

**Remarque 5** 1. Attention, si  $\Omega \neq \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{D}(\Omega)$  n'est pas dense dans  $H^m(\Omega)$ . Si  $\Omega$  est suffisamment régulier ( $\Omega$  de classe  $C^m$ )  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  (et donc  $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ ) est dense dans  $H^m(\Omega)$ .

2. Les espaces  $H^s(\mathbb{R}^n)$  pour  $s \in \mathbb{R}$  peuvent être défini à l'aide de la transformée de Fourier (voir le livre de Lions-Magenes [5]).

3. Les espaces  $W^{m,p}(\Omega)$ ,  $m \in \mathbb{N}$  et  $p \in [1, +\infty]$  généralisent les espaces  $H^m(\Omega)$ . Ils sont définis par

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) ; \forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n \text{ avec } |\alpha| \leq m \text{ on a } \partial^\alpha u \in L^p(\Omega) \right\}.$$

On remarquera que  $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$ .

### 3.2.2 Le cas particulier des fonctions de $H^1(\Omega)$ et $H^2(\Omega)$

Dans ce paragraphe  $\Omega$  désigne un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$ . On rappelle que

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) ; \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \text{ pour tout } i = 1, \dots, n \right\},$$

et que le produit scalaire sur  $H^1(\Omega)$  est donné par

$$(u, v)_1 = \int_{\Omega} u(x) v(x) dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) dx,$$

pour tout  $u, v$  dans  $H^1(\Omega)$ .

Ainsi la norme associée est donnée par

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

On utilisera également une norme équivalente (exercice), notée de la même manière, définie par

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \|u\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}.$$

De même,

$$H^2(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) ; \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \text{ pour tout } i = 1, \dots, n \right.$$

$$\left. \text{et } \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^2(\Omega) \text{ pour tout } i, j = 1, \dots, n \right\},$$

et la norme associée au produit scalaire est

$$\|u\|_{H^2(\Omega)}^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

### 3.2.2.1 Caractérisation des fonctions de $H^1(\Omega)$

**Théorème 6** Si  $n = 1$  alors  $H^1(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$ .

**Remarque 6** Les fonctions de  $H^1(\Omega)$  sont des fonctions de  $L^2(\Omega)$  et ne sont donc définies que presque partout. Ainsi l'injection du théorème 6 signifie que dans la classe d'équivalence de  $u$  il existe un représentant continu. Tous les éléments de la classe d'équivalence de  $u$  sont égaux presque partout à ce représentant continu. On choisit bien sûr de travailler avec ce représentant continu.

**Preuve du théorème 6 :**

Soit  $u \in H^1(\Omega)$ , on veut montrer qu'il existe  $\bar{u} \in C(\bar{\Omega})$  tel que  $u = \bar{u}$  presque partout dans  $\Omega$ .

Pour cela, on fixe un point  $x_0$  quelconque dans  $\Omega$  et on introduit une fonction  $\tilde{u}$  définie par

$$\tilde{u}(x) = \int_{x_0}^x u'(t) dt,$$

pour tout  $x \in \Omega$ .

Notons que  $\tilde{u}(x)$  a bien un sens pour tout  $x \in \Omega$  puisque d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|\tilde{u}(x)| \leq \sqrt{|x - x_0|} \|u'\|_{L^2(\Omega)} < +\infty.$$

Calculons la dérivée de  $\tilde{u}$  au sens des distributions. Soit  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ , on choisit  $a$  et  $b$  dans  $\mathbb{R}$  tels que  $\text{supp}(\varphi) \subset [a, b]$  et tels que  $x_0 \in ]a, b[$ , alors

$$\langle \tilde{u}', \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} = - \langle \tilde{u}, \varphi' \rangle = - \int_a^b \tilde{u}(x) \varphi'(x) dx = - \int_a^b \int_{x_0}^x u'(t) dt \varphi'(x) dx.$$

On utilise alors le théorème de Fubini afin d'intégrer le terme en  $\varphi'$ .

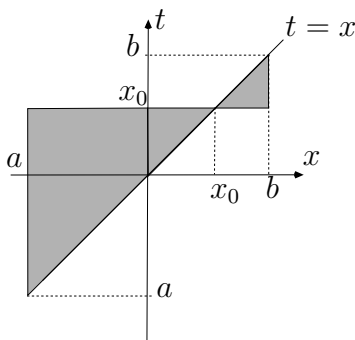


Figure 3.1: Domaine d'intégration.

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{u}', \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} &= - \int_a^{x_0} \int_{x_0}^x u'(t) \varphi'(x) dt dx - \int_{x_0}^b \int_{x_0}^x u'(t) \varphi'(x) dt dx, \\
&= \int_a^{x_0} \int_{x_0}^x u'(t) \varphi'(x) dt dx - \int_{x_0}^b \int_{x_0}^x u'(t) \varphi'(x) dt dx, \\
&= \int_a^{x_0} \int_a^t u'(t) \varphi'(x) dx dt - \int_{x_0}^b \int_t^b u'(t) \varphi'(x) dx dt, \\
&= \int_a^{x_0} u'(t) (\varphi(t) - \varphi(a)) dt - \int_{x_0}^b u'(t) (\varphi(b) - \varphi(t)) dx dt, \\
&= \int_a^b u'(t) \varphi(t) dt,
\end{aligned}$$

car  $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ .

Ce qui montre que  $\tilde{u}' = u'$  dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$  et donc il existe  $C \in \mathbb{R}$  telle que  $\tilde{u} = u + C$  dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$  (voir feuille de TD 1). Mais  $\tilde{u}$  et  $u$  étant dans  $L^2(\Omega)$ , on a  $\tilde{u} = u + C$  presque partout dans  $\Omega$ . On pose

$$\bar{u} = \tilde{u} - C, \quad \text{pour tout } x \in \Omega,$$

alors, on a

$$\bar{u} = u, \quad \text{presque partout dans } \Omega.$$

De plus  $\bar{u}$  est continue sur  $\bar{\Omega}$  puisque pour tout  $x, y$  dans  $\bar{\Omega}$ , on a

$$\begin{aligned}
|\bar{u}(x) - \bar{u}(y)| &= \left| \int_{x_0}^x u'(t) dt - C - \int_{x_0}^y u'(t) dt + C \right|, \\
&= \left| \int_y^x u'(t) dt \right| \leq \sqrt{|x - y|} \|u'\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

**Remarque 7** Attention, si  $n > 1$ , le théorème 6 est faux. En général, les fonctions de  $H^1(\Omega)$  ( $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n > 1$ ) ne sont pas des fonctions continues (i.e. ne sont pas égales presque partout à une fonction continue). En fait, on montre qu'elles peuvent avoir des singularités mais celles-ci sont localisées sur des sous variétés de dimension au plus  $n - 2$  (en dimension 2 au pire des points, en dimension 3 au pire des courbes...).

**Exemple :** d'une fonction de  $H^1$  en dimension 2 ayant une singularité en un point. On pose  $\Omega = B(0, 1/2)$  la boule de centre  $(0, 0)$  et de rayon  $1/2$ . On considère la fonction

$$u(x, y) = \left( \ln \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \right)^k,$$

pour tout  $(x, y) \in \Omega$  et où  $k$  est un réel fixé dans  $]0, 1/2[$ .

Alors,  $u$  admet clairement une singularité en  $(0, 0)$  puisque

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} u(x, y) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \left( \ln \frac{1}{r} \right)^k = +\infty.$$

On montre que  $u$  est bien dans  $H^1(\Omega)$ . (Sera fait en exercice en TD ????)

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega} \left( \ln \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \right)^{2k} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{1/2} \ln \left( \frac{1}{r} \right)^{2k} r dr d\theta, \\ &= 2\pi \int_0^{1/2} \left( \frac{1}{r} \right)^{2k} r dr = 2\pi \int_0^{1/2} r^{1-2k} dr, \end{aligned}$$

car  $\ln x \leq x$  pour tout  $x > 0$ . Puisque  $k \in ]0, 1/2[$ ,  $1 - 2k \in ]0, 1[$  et ainsi

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \pi.$$

De plus

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{1/2} \left( \left( \frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 \right) \frac{du}{dr} r dr d\theta \\ &= 2\pi k^2 \int_0^{1/2} \left( \ln \frac{1}{r} \right)^{2k-2} \frac{1}{r} dr = \left[ - \left( \ln \frac{1}{r} \right)^{2k-1} \frac{2\pi k^2}{2k-1} \right]_0^{1/2} < +\infty, \end{aligned}$$

car  $2k - 1 < 0$  et donc  $\lim_{r \rightarrow 0} \left( \ln \frac{1}{r} \right)^{2k-1} = 0$ .

### 3.2.2.2 Traces et formules de Green

Lorsqu'on résout un problème elliptique sur un domaine borné, on doit imposer des conditions aux limites sur le bord du domaine, noté  $\partial\Omega$ , par exemple en fixant la valeur de la fonction.

Mais, lorsqu'une fonction n'est définie que presque partout, comment définir sa valeur sur  $\partial\Omega$ , qui est un ensemble de mesure nulle dans  $\mathbb{R}^n$  ?

Nous allons voir que pour une fonction  $u$  de  $H^1(\Omega)$  on sait définir la valeur de  $u$  sur le bord du domaine.

Avant cela, on commence par définir la régularité d'un ouvert.

**Définition 7** On dit qu'un ouvert borné  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ) est de classe  $C^k$  pour  $k \in \mathbb{N}$  (respectivement Lipschitzien) si on peut trouver un nombre fini d'ouverts  $(O_i)_{0 \leq i \leq I}$  de  $\mathbb{R}^n$  tels que  $\bar{O}_0 \subset \Omega$ ,  $\bar{\Omega} \subset \cup_{i=0}^I O_i$ ,  $\partial\Omega \subset \cup_{i=1}^I O_i$  et tels que pour tout  $i \in \{1, \dots, I\}$  il existe une application  $\phi_i$  bijective de classe  $C^k$  (respectivement Lipschitzienne) de  $O_i$  dans l'ensemble

$$B = \left\{ x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} ; \|x\|_2 \leq 1 \right\},$$

où  $\|\cdot\|_2$  est la norme Euclidienne de  $\mathbb{R}^n$ , de plus, l'inverse de  $\phi_i$  doit être de classe  $C^k$  (respectivement Lipschitzien) et tel que

$$\phi_i(O_i \cap \Omega) = \left\{ x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} ; \|x\|_2 \leq 1 \text{ et } x_n > 0 \right\} =: B^+,$$

et

$$\phi_i(O_i \cap \partial\Omega) = \left\{ x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} ; \|x\|_2 \leq 1 \text{ et } x_n = 0 \right\} =: \Gamma.$$

Les  $\phi_i$  sont des difféomorphismes de classe  $C^k$  (respectivement Lipschitziens).

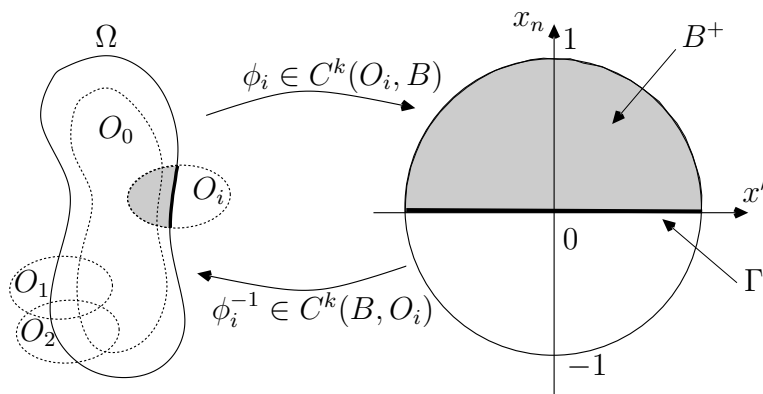


Figure 3.2: Résumé géométrique de la définition précédente

Comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent, les fonctions de  $H^1(\Omega)$  ( $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ) peuvent avoir des singularités mais celles ci sont localisées sur des sous variétés de dimension  $n - 2$ . Ainsi, il va y avoir un sens à parler de la restriction d'une fonction de  $H^1(\Omega)$  sur une sous variété de dimension  $n - 1$ . Cette restriction sera définie presque partout au sens  $n - 1$ . C'est à dire que si  $n = 2$ , on pourra définir les valeurs d'une fonction de  $H^1$  sur des courbes pour presque tout point de cette courbe.

On montre le résultat suivant

**Théorème 7** Si  $\Omega$  est un ouvert borné de classe  $C^1$ , alors l'application

$$\gamma : \left( C^1(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_{H^1(\Omega)} \right) \rightarrow \left( L^2(\partial\Omega), \|\cdot\|_{L^2(\partial\Omega)} \right)$$

$$u \mapsto u|_{\partial\Omega}$$

est une application linéaire et continue et se prolonge de manière unique en une application linéaire et continue de  $H^1(\Omega)$  dans  $L^2(\partial\Omega)$  encore notée  $\gamma$ .

**Preuve :** Voir cours Master 1 fondamental [8], admis en IMAT.

**Remarque 8** 1. L'application trace  $\gamma$  n'est bien sûr pas injective, deux fonctions de  $H^1(\Omega)$  peuvent avoir la même trace sans être identiques. Elle n'est pas non plus surjective à valeurs dans  $L^2(\Omega)$ . On peut montrer que l'image de  $H^1(\Omega)$  est un espace plus petit que  $L^2(\Omega)$ , c'est

$$H^{1/2}(\partial\Omega) = \left\{ g \in L^2(\partial\Omega) ; (x, y) \mapsto \frac{|g(x) - g(y)|}{|x - y|^{(1+(n-1))/2}} \in L^2(\partial\Omega \times \partial\Omega) \right\},$$

on peut se restreindre à ne retenir que

$$H^{1/2}(\partial\Omega) = \{ g \in L^2(\partial\Omega) ; \exists u \in H^1(\Omega) \text{ telle que } \gamma(u) = g \text{ dans } L^2(\partial\Omega) \}.$$

2. On désigne par  $H_0^1(\Omega)$  l'adhérence de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $H^1(\Omega)$  pour la norme de  $H^1(\Omega)$  :

$$H_0^1(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^1(\Omega)}.$$



Ce qui signifie que les fonctions de  $H_0^1(\Omega)$  sont les limites dans  $H^1(\Omega)$  de suites de fonctions de  $\mathcal{D}(\Omega)$ .

Alors,  $H_0^1(\Omega)$  est le noyau de  $\gamma$ , on a

$$H_0^1(\Omega) = \text{Ker}(\gamma) = \left\{ u \in H^1(\Omega) ; \gamma(u) = 0 \text{ dans } L^2(\partial\Omega) \right\}.$$

Cette notion de trace va nous permettre d'introduire la formule de Green (Intégration Par Partie en dimension plus grande que 1) pour des fonctions de  $H^1(\Omega)$ .

**Théorème 8** Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert borné de classe  $C^1$ , on note  $\partial\Omega$  sa frontière et  $\nu$  la normale unitaire à  $\partial\Omega$  extérieure à  $\Omega$ . Alors, pour tout  $u, v$  dans  $H^1(\Omega)$ , on a

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) v(x) dx = \int_{\partial\Omega} \gamma(u)(x) \gamma(v)(x) \nu(x) \cdot e_i d\sigma(x) - \int_{\Omega} u(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) dx,$$

où  $d\sigma$  est la mesure superficielle sur  $\partial\Omega$  induite par  $dx$  et  $e_i$  est le  $i^{\text{ème}}$  vecteur de la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .

**Preuve :** Voir cours Master 1 fondamental [8], admis en IMAT.

**Remarque 9** 1. A titre d'exemple, pour fixer les idées, si  $n = 2$  et si  $\Omega$  est la boule de centre  $(0,0)$  et de rayon  $R > 0$  donné, alors en passant en coordonnées polaires, on a  $dx = r dr d\theta$  et  $d\sigma(x) = R d\theta$ . (voir tout bon cours de 2<sup>ème</sup> année sur l'intégration sur les surfaces).

2. On peut remarquer que si  $u \in H^2(\Omega)$ , alors  $\nabla u \in (H^1(\Omega))^n$  et donc, on sait définir  $\nabla u$  sur le bord de  $\Omega$ . On notera  $\gamma(\nabla u)$  bien que l'on devrait noter

$$\left( \gamma \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} \right), \dots, \gamma \left( \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) \right).$$

On a alors la formule de Green suivante

**Théorème 9** Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ( $n \geq 1$ ) un ouvert borné de classe  $C^2$ , on note  $\nu$  la normale à  $\partial\Omega$ , extérieure à  $\Omega$ . Soit une matrice  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  de taille  $n \times n$  dont les coefficients  $a_{ij} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  sont des fonctions de  $L^\infty(\Omega)$ , soit de plus  $u \in H^2(\Omega)$  et  $v \in H^1(\Omega)$  alors

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \text{div}(A(x) \nabla u(x)) v(x) dx \\ = \int_{\partial\Omega} \gamma(A \nabla u)(x) \cdot \nu(x) \gamma(v)(x) d\sigma(x) - \int_{\Omega} A(x) \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx, \end{aligned}$$

où  $d\sigma$  est la mesure superficielle sur  $\partial\Omega$  induite par  $dx$ .

**Preuve :** Voir cours Master 1 fondamental [8], admis en IMAT.

### 3.2.3 Inégalités de Poincaré

On termine ce paragraphe par deux inégalités de type Poincaré, nécessaires pour établir l'existence et l'unicité de solutions à certains problèmes elliptiques.

**Théorème 10 (Inégalité de Poincaré)** *On suppose que  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  est un ouvert borné de classe  $C^1$ .*

*Alors, il existe  $C_\Omega > 0$  ne dépendant que de  $\Omega$ , telle que*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)},$$

pour tout  $u \in H_0^1(\Omega)$ .

**Preuve :** Ne sera pas faite dans le cadre général en cours de Master 1 IMAT, voir cours de Master 1 fondamental [8].

On montre ce résultat de manière directe (il existe une démonstration par l'absurde plus simple dans le cadre général) en une dimension d'espace pour permettre de comprendre pourquoi ce résultat est vrai.

Soit  $u \in H_0^1(]0, 1[) \subset H^1(]0, 1[)$ , on travaille avec le représentant continu qu'on note encore  $u$  (voir démonstration du théorème 6). Alors, pour presque tout  $x \in ]0, 1[$

$$u(x) = u(x) - u(0) = \int_0^x u'(y) dy,$$

et donc

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2(]0,1[)}^2 &= \int_0^1 |u(y)|^2 dy = \int_0^1 \left( \int_0^x u'(y) dy \right)^2 dx \\ &\leq \int_0^1 \left( \int_0^1 u'(y) dy \right)^2 dx = \left( \int_0^1 u'(y) dy \right)^2. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\|u\|_{L^2(]0,1[)}^2 \leq \left( \int_0^1 |u'(y)|^2 dy \right) \left( \int_0^1 1 dy \right) = \|u'\|_{L^2(]0,1[)}^2.$$

Ce qui montre bien le résultat annoncé. Notons qu'ici  $C = 1$  ceci correspond à la longueur du domaine. En dimension supérieure, cette démonstration donnerait pour constante le diamètre du domaine, c'est à dire

$$d_\Omega = \sup_{x,y \in \Omega} \|x - y\|.$$

où  $\|\cdot\|$  est la norme Euclidienne.

**Théorème 11 (Inégalité de Poincaré-Wirtinger)** *On suppose que  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  est un ouvert borné de classe  $C^1$ .*

*Alors, il existe  $C_\Omega > 0$  ne dépendant que de  $\Omega$ , telle que*

$$\|u - \langle u \rangle_\Omega\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)},$$

pour tout  $u \in H^1(\Omega)$  et où  $\langle u \rangle_\Omega$  est la moyenne de  $u$  sur  $\Omega$  donnée par

$$\langle u \rangle_\Omega = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u(x) dx,$$

et  $|\Omega| = \int_\Omega dx$ .

**Preuve :** Ne sera pas faite dans le cadre général en cours de Master 1 IMAT, voir cours de Master 1 fondamental [8].

On donne, ici encore une démonstration directe en une dimension d'espace afin de comprendre pourquoi le résultat est vrai.

Soit  $u \in H_0^1(]0, 1[) \subset H^1(]0, 1[)$ , on travaille avec le représentant continu qu'on note encore  $u$  (voir démonstration du théorème 6). Alors, pour presque tout  $x \in ]0, 1[$  et tout  $y \in ]0, 1[$ , on a

$$u(x) - u(y) = \int_y^x u'(t) dt.$$

En intégrant en  $y$ , il vient

$$\int_0^1 (u(x) - u(y)) dy = \int_0^1 \left( \int_y^x u'(t) dt \right) dy \leq \int_0^1 \int_0^1 |u'(t)| dt dy = \int_0^1 |u'(t)| dt.$$

Mais

$$\int_0^1 (u(x) - u(y)) dy = u(x) - \langle u \rangle_\Omega.$$

Donc

$$\begin{aligned} \|u - \langle u \rangle_\Omega\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \int_0^1 |u(x) - \langle u \rangle_\Omega|^2 dx \\ &\leq \int_0^1 \left( \int_0^1 |u'(t)| dt \right)^2 dx = \left( \int_0^1 |u'(t)| dt \right)^2. \end{aligned}$$

Et, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\|u - \langle u \rangle_\Omega\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \left( \int_0^1 |u'(t)|^2 dt \right) \left( \int_0^1 1 dt \right) = \|u'\|_{L^2(]0,1[)}^2.$$

Ce qui termine la preuve du Théorème 11.

### 3.3 Théorème de Lax-Milgram

Nous verrons que pour montrer l'existence et l'unicité d'une solution à un problème elliptique, nous utiliserons le théorème de Lax-Milgram. Avant d'énoncer ce résultat, je redonne quelques définitions.

Dans ce paragraphe  $V$  désigne un espace de Hilbert (espace vectoriel muni d'un produit scalaire (préhilbertien) et complet pour la norme associée au produit scalaire). On note  $(\cdot, \cdot)_V$  son produit scalaire et  $\|\cdot\|_V$  la norme associée à ce produit scalaire.

**Définition 8** Soit  $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ , on dit que  $a$  est une forme

1. bilinéaire si

pour tout  $u \in V$ , l'application  $V \rightarrow \mathbb{R}$  est linéaire,  
 $v \mapsto a(u, v)$

et pour tout  $v \in V$ , l'application  $V \rightarrow \mathbb{R}$  est linéaire.  
 $u \mapsto a(u, v)$

2. coercive (ou coercitive) s'il existe  $C > 0$  telle que pour tout  $u \in V$

$$a(u, u) \geq C \|u\|_V^2.$$

3. symétrique, si pour tout  $u$  et  $v$  dans  $V$ ,  $a(u, v) = a(v, u)$ .

**Remarque 10** Si  $a$  est une forme bilinéaire de  $V \times V$  dans  $\mathbb{R}$ , pour montrer sa continuité, il suffit de montrer qu'il existe  $C > 0$  telle que pour tout  $u, v$  dans  $V$

$$|a(u, v)| \leq C \|u\|_V \|v\|_V.$$

En effet sur  $V \times V$  la norme est définie par

$$\|(u, v)\|_{V \times V} = \|u\|_V + \|v\|_V.$$

Alors

$$\begin{aligned} |a(u_1, v_1) - a(u_2, v_2)| &= |a(u_1, v_1) - a(u_1, v_2) + a(u_1, v_2) - a(u_2, v_2)|, \\ &= |a(u_1, v_1 - v_2) + a(u_1 - u_2, v_2)| \leq C \|u_1\|_V \|v_1 - v_2\|_V + C \|u_1 - u_2\|_V \|v_2\|_V, \\ &\leq C \|u_1\|_V \|(u_1, v_1) - (u_2, v_2)\|_{V \times V} + C \|(u_1, v_1) - (u_2, v_2)\|_{V \times V} \|v_2 - v_1 + v_1\|_V, \\ &\leq C \left( \|u_1\|_V + \|(u_1, v_1) - (u_2, v_2)\|_{V \times V} + \|v_1\|_V \right) \|(u_1, v_1) - (u_2, v_2)\|_{V \times V}. \end{aligned}$$

Ce qui montre bien que

$$\lim_{(u_2, v_2) \rightarrow (u_1, v_1)} a(u_2, v_2) = a(u_1, v_1),$$

pour tout  $(u_1, v_1) \in V \times V$ .

Le théorème de Lax-Milgram s'énonce de la façon suivante

**Théorème 12** Soient  $L \in \mathcal{L}(V, \mathbb{R}) = V'$  une forme linéaire et continue sur  $V$  et  $a$  une forme bilinéaire, continue et coercive sur  $V$ , alors le problème

$$\text{Trouver } u \in V \text{ tel que } a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V, \quad (3.1)$$

admet une unique solution.

De plus l'application  $T : V' \rightarrow V$  qui à tout  $L \in V'$  associe  $T(L)$  la solution de (3.1), est linéaire et continue. Donc, il existe  $C > 0$  telle que pour tout  $L \in V'$

$$\|u\|_V \leq C \|L\|_{V'}.$$

Si de plus  $a$  est symétrique alors  $u$  est caractérisé par

$$\frac{1}{2} a(u, u) - L(u) = \min_{v \in V} \left( \frac{1}{2} a(v, v) - L(v) \right).$$

**Preuve :** Voir cours master 1 fondamental [8] (ne sera pas fait en IMAT).

## Chapitre 4

# L'équation de Poisson en dimension $n \geq 2$

Dans ce chapitre  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ) est un ouvert borné de classe  $C^1$ . On note  $\partial\Omega$  sa frontière et  $\nu$  la normale unitaire à  $\partial\Omega$  extérieure à  $\Omega$ .

On considère l'équation de Poisson donnée par

$$-\Delta u(x) = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (4.1)$$

où  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est l'inconnue et  $f \in L^2(\Omega)$  est une fonction donnée.

### 4.1 Conditions aux limites de Dirichlet homogène

Il suffit de regarder l'équation (4.1) en dimension 1 (exercice) pour se convaincre qu'il est nécessaire d'imposer une condition aux limites, sans quoi il ne peut y avoir unicité de la solution.

Dans ce paragraphe, nous choisissons d'imposer la condition aux limites dite de Dirichlet homogène suivante

$$u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (4.2)$$

On rappelle que l'appellation Dirichlet signifie qu'on impose la valeur de la fonction au bord et elle est dite homogène car la valeur imposée est 0.

#### 4.1.1 Formulation variationnelle

La formulation classique de (4.1), (4.2) consiste à chercher  $u$  suffisamment régulière pour que ces égalités aient un sens. Si on suppose que  $f$  est continue alors pour que (4.1) ait un sens, on doit avoir  $u \in C^2(\Omega)$  et pour que (4.2) ait un sens, on doit avoir  $u \in C(\bar{\Omega})$ . La formulation classique est donc

Trouver  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  solution de (4.1), (4.2).

Nous avons déjà vu dans l'introduction que cette vision classique ne suffit pas pour décrire la réalité physique. En effet, dans beaucoup de problèmes pratiques, on est amené à considérer des quantités non régulières.

Pour ces raisons, on introduit la formulation faible ou formulation variationnelle du problème qui permet de donner un sens au problème pour des quantités non régulières.

Guidés par la définition de la dérivée au sens des distributions, on commence par multiplier (4.1) par une fonction test et on intègre le résultat sur  $\Omega$ .

$$-\int_{\Omega} \Delta u(x) v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx. \quad (4.3)$$

Le but est d'obtenir un problème sous la forme donnée dans le théorème de Lax-Milgram, c'est à dire :

Trouver  $u \in V$  tel que  $a(u, v) = L(v)$ , pour tout  $v \in V$ .

On voit que l'espace est le même pour  $u$  et  $v$ . Or, pour que tous les termes de (4.3) aient un sens, on doit avoir  $\Delta u \in L^2(\Omega)$ ,  $v \in L^2(\Omega)$  et  $f \in L^2(\Omega)$ , soit  $u \in H^2(\Omega)$  et  $v \in L^2(\Omega)$ . On va donc, utiliser la formule de Green afin d'abaisser le degré de la dérivée sur  $u$  et l'augmenter sur  $v$ . On obtient

$$-\int_{\partial\Omega} \gamma(\nabla u(x)) \cdot \nu(x) \gamma(v)(x) d\sigma(x) + \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx.$$

Le terme de bord nécessite la définition de la trace de  $\nabla u$ , soit donc  $\nabla u \in H^1(\Omega)$ , soit encore  $u \in H^2(\Omega)$  et  $v \in H^1(\Omega)$ . L'autre terme nécessite  $u$  et  $v$  dans  $H^1(\Omega)$ . Rappelons nous qu'on doit encore imposer la condition aux limites, c'est à dire  $\gamma(u) = 0$  sur  $\partial\Omega$ . En imposant la même condition sur  $v$ , toujours dans un souci d'avoir le même espace pour les deux fonctions (Lax-Milgram), on voit que  $\gamma(v) = 0$  annule le terme de bord. Et la formulation faible est donnée par

$$\text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que } \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx, \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (4.4)$$

Nous verrons dans le paragraphe suivant que cette formulation rentre exactement dans le cadre du théorème de Lax-Milgram.

**Remarque 11** *On remplace le problème (4.1), (4.2) par le problème (4.4). Nous verrons dans un paragraphe suivant que la solution de ce problème existe et est unique. Mais, en quel sens l'équation est vérifiée ?*

*Pour répondre à cette question il suffit "d'interpréter" la formulation variationnelle.*

*Tout d'abord,  $u \in H_0^1(\Omega)$  donc  $\gamma(u) = 0$  dans  $L^2(\partial\Omega)$  et donc  $u = 0$  presque partout au sens  $n - 1$  dimensionnel sur  $\partial\Omega$ .*

De plus, en choisissant  $v = \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ , on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx &= \sum_{i=1}^n \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} = \langle f, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)}, \\ &\Leftrightarrow - \sum_{i=1}^n \left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \varphi \right\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} = \langle f, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)}, \\ &\Leftrightarrow \langle -\Delta u, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} = \langle f, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)}, \end{aligned}$$

et donc

$$-\Delta u = f, \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Mais comme  $f \in L^2(\Omega)$ , on a  $-\Delta u = f$ , dans  $L^2(\Omega)$  et ainsi

$$-\Delta u = f, \quad \text{presque partout dans } \Omega.$$

Ainsi, le problème (4.1), (4.2) est satisfait presque partout.

#### 4.1.2 Existence et unicité de la solution

On montre dans ce paragraphe, le résultat suivant

**Théorème 13** *Pour tout  $f \in L^2(\Omega)$ , le problème (4.1), (4.2) possède une unique solution faible  $u \in H_0^1(\Omega)$ , de plus il existe  $C$  ne dépendant que de  $\Omega$  telle que*

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

**Preuve :** On utilise le théorème de Lax-Milgram. On pose  $V = H_0^1(\Omega)$  que l'on muni de la norme de  $H^1(\Omega)$ . L'espace  $H_0^1(\Omega)$  est bien un espace de Hilbert, la démonstration est la même que pour  $H^1(\Omega)$ , il suffit juste de vérifier que si une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H_0^1(\Omega)$  converge dans  $H^1(\Omega)$  vers  $u$  alors  $\gamma(u) = 0$  dans  $L^2(\partial\Omega)$ . Ce résultat est donné par la continuité de l'application trace de  $H^1(\Omega)$  dans  $L^2(\partial\Omega)$ .

Pour tout  $u$  et  $v$  dans  $H_0^1(\Omega)$ , on définit

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx,$$

et

$$L(v) = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx.$$

Alors  $a$  est clairement bilinéaire (exercice) et  $a$  est continue, car pour tout  $u$  et  $v$  dans  $H_0^1(\Omega)$ , d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|a(u, v)| \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

De plus,  $a$  est coercive car pour tout  $u \in H_0^1(\Omega)$

$$a(u, u) = \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx = \frac{1}{2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \frac{1}{2C_{\Omega}^2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

d'après l'inégalité de Poincaré donnée dans le Théorème 10.

Ainsi,

$$a(u, u) \geq \frac{\min(1, 1/C_\Omega^2)}{2} \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

Enfin,  $L$  est linéaire de  $V$  dans  $\mathbb{R}$  (exercice) et  $L$  est continue car pour tout  $v \in H_0^1(\Omega)$

$$|L(v)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Alors, d'après le Théorème de Lax-Milgram, il existe un unique  $u \in H_0^1(\Omega)$  solution de

$$a(u, v) = L(v), \quad \text{pour tout } v \in H_0^1(\Omega),$$

et il existe  $C > 0$  telle que

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|L\|_{(H_0^1(\Omega))'} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)},$$

car

$$\|L\|_{(H_0^1(\Omega))'} = \sup_{\substack{v \in H_0^1(\Omega) \\ v \neq 0}} \frac{|L(v)|}{\|v\|_{H^1(\Omega)}}$$

et

$$\frac{|L(v)|}{\|v\|_{H^1(\Omega)}} = \frac{|\int_\Omega f(x) v(x) dx|}{\|v\|_{H^1(\Omega)}} \leq \frac{\|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}}{\|v\|_{H^1(\Omega)}} = \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Ce qui termine la démonstration du Théorème 13.

## 4.2 Conditions aux limites de Dirichlet non homogène

### 4.2.1 Formulation variationnelle

Voyons maintenant ce que devient la formulation variationnelle, si l'on change la condition aux limites en une condition aux limites de Dirichlet non homogène. Le problème qui nous intéresse est donc le suivant

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x), & x \in \Omega, \\ u(x) = g, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.5)$$

où  $f \in L^2(\Omega)$  et  $g \in H^{1/2}(\partial\Omega) \subset L^2(\partial\Omega)$  sont données. On rappelle que

$$H^{1/2}(\partial\Omega) = \left\{ g \in L^2(\partial\Omega) ; \exists u \in H^1(\Omega) \text{ telle que } \gamma(u) = g, \text{ dans } L^2(\partial\Omega) \right\}.$$

Comme précédemment, on multiplie l'équation par une fonction test, et en utilisant la formule de Green, on obtient

$$\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx - \int_{\partial\Omega} \nabla u(x) \cdot \nu(x) v(x) d\sigma(x) = \int_\Omega f(x) v(x) dx.$$



On choisit  $v \in H_0^1(\Omega)$  afin d'annuler les termes de bords et on cherche  $u$  dans l'espace suivant

$$V = \left\{ u \in H^1(\Omega) ; \gamma(u) = g \text{ dans } L^2(\partial\Omega) \right\}. \quad (4.6)$$

La formulation du problème est alors

$$\text{Trouver } u \in V \text{ tel que } \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx, \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

**Remarque 12 1-** On pourra remarquer que l'équation est la même que celle dans le cas d'une condition aux limites de Dirichlet homogène. Ainsi, le choix de l'espace dans lequel on recherche la solution est un élément fondamental dans la formulation variationnelle.

**2-** La formulation variationnelle ainsi donnée n'est pas sous la forme de celle présentée dans le Théorème de Lax-Milgram. En effet, l'espace de la solution exacte n'est pas identique à celui des fonctions tests. Nous verrons dans le paragraphe suivant qu'il est possible de symétriser le problème de sorte à pouvoir utiliser le Théorème de Lax-Milgram.

#### 4.2.2 Existence et unicité de la solution

On montre dans ce paragraphe le résultat suivant

**Théorème 14** Pour toute fonction  $f \in L^2(\Omega)$  et toute fonction  $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ , il existe une unique solution faible  $u \in V$ , où  $V$  est donné par (4.6), solution faible du problème (4.5), de plus il existe  $C$  ne dépendant que de  $\Omega$  telle que

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left( \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \right),$$

avec

$$\|g\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} = \inf_{\substack{v \in H^1(\Omega) \\ \gamma(v)=g}} \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

L'estimation ne sera pas donnée en IMAT.

**Preuve :** On commence par symétriser le problème. La fonction  $g$  étant dans  $H^{1/2}(\partial\Omega)$ , il existe  $u_g \in H^1(\Omega)$  (non nécessairement défini de manière unique) tel que  $\gamma(u_g) = g$  dans  $L^2(\partial\Omega)$ .

On pose  $w = u - u_g$  où  $u$  est la solution de la formulation variationnelle. Alors,  $w \in H_0^1(\Omega)$  et satisfait

$$\int_{\Omega} \nabla w(x) \cdot \nabla v(x) dx = - \int_{\Omega} \nabla u_g(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\Omega} f(x) v(x) dx, \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

On remplace alors la formulation variationnelle par le problème suivant

Trouver  $w \in H_0^1(\Omega)$  tel que

$$\int_{\Omega} \nabla w(x) \cdot \nabla v(x) dx = - \int_{\Omega} \nabla u_g(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\Omega} f(x) v(x) dx, \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

On pose

$$a(w, v) = \int_{\Omega} \nabla w(x) \cdot \nabla v(x) \, dx,$$

et

$$L(v) = - \int_{\Omega} \nabla u_g(x) \cdot \nabla v(x) \, dx + \int_{\Omega} f(x) v(x) \, dx.$$

Nous avons déjà montré dans le paragraphe précédent que  $a$  est bilinéaire, continue et coercive de  $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Il reste à montrer que  $L$  est linéaire (exercice) et continue de  $H_0^1(\Omega)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour tout  $v \in H_0^1(\Omega)$ , on a

$$|L(v)| \leq \|\nabla u_g\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \left( \|u_g\|_{H^1(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} \right) \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Mais, l'application trace étant continue de  $H^1(\Omega)$  dans  $L^2(\partial\Omega)$ , il existe  $C$ , ne dépendant que de  $\Omega$  telle que

$$\|u_g\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|g\|_{L^2(\partial\Omega)},$$

et ainsi

$$|L(v)| \leq \left( C \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} \right) \|v\|_{H^1(\Omega)},$$

ce qui montre bien la continuité de  $L$ .

D'après le Théorème de Lax-Milgram, on sait alors qu'il existe un unique  $w \in H_0^1(\Omega)$  solution de

$$a(w, v) = L(v), \quad \text{pour tout } v \in H_0^1(\Omega).$$

On pose

$$u = w + u_g,$$

alors  $u$  est bien solution faible de (4.5).

Il reste à montrer l'unicité de cette solution.

Soient donc  $u_1$  et  $u_2$  dans  $H^1(\Omega)$  telles que  $\gamma(u_1) = g$  et  $\gamma(u_2) = g$  dans  $L^2(\partial\Omega)$  et telles que pour tout  $v \in H_0^1(\Omega)$ , on ait

$$\int_{\Omega} \nabla u_1(x) \cdot \nabla v(x) \, dx = \int_{\Omega} \nabla u_2(x) \cdot \nabla v(x) \, dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) \, dx.$$

Alors  $u_1 - u_2 \in H_0^1(\Omega)$  et satisfait

$$\int_{\Omega} \nabla(u_1 - u_2)(x) \cdot \nabla v(x) \, dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) \, dx,$$

pour tout  $v \in H_0^1(\Omega)$ .

Or, d'après le Théorème de Lax-Milgram ce problème admet une unique solution. Mais, 0 étant solution, on obtient

$$u_1 - u_2 = 0.$$

Il reste à établir l'estimation, pas au programme en IMAT, voir cours Master 1 Mathématiques fondamentales [8].

### 4.3 Conditions aux limites de Neumann

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à l'équation de Poisson avec conditions aux limites de Neumann, donnée par

$$-\Delta u(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \tag{4.7}$$

$$\nabla u(x) \cdot \nu(x) = g, \quad x \in \partial\Omega, \tag{4.8}$$

où  $f \in L^2(\Omega)$  et  $g \in L^2(\partial\Omega)$  sont données.

Là encore, on multiplie l'équation par une fonction test, et en utilisant la formule de Green, on obtient

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) \, dx - \int_{\partial\Omega} \nabla u(x) \cdot \nu(x) v(x) \, d\sigma(x) = \int_{\Omega} f(x) v(x) \, dx.$$

Puis, on utilise la condition aux limites (4.8) et la formulation faible du problème est

Trouver  $u \in H^1(\Omega)$  tel que (4.9)

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) \, dx - \int_{\partial\Omega} g(x) v(x) \, d\sigma(x) = \int_{\Omega} f(x) v(x) \, dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

**Remarque 13** 1. On peut remarquer que dans ce problème, on ne fixe que les dérivées premières (sur le bord) et secondes dans le domaine. Ainsi, si  $u$  est solution,  $u + C$ , où  $C$  est une constante réelle donnée est encore solution. Sans hypothèse supplémentaire, il ne sera donc pas possible d'avoir l'unicité de la solution. Classiquement, l'hypothèse rajoutée est celle qui fixe la moyenne de  $u$  à 0. On impose donc

$$\int_{\Omega} u(x) \, dx = 0.$$

2. On montre qu'il y a une condition nécessaire pour l'existence d'une solution à ce problème avec le résultat suivant

**Proposition 2** Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert borné de classe  $C^1$ , on considère  $f \in L^2(\Omega)$  et  $g \in L^2(\partial\Omega)$  donnés. Alors

$$\exists u \in H^1(\Omega) \text{ solution de (4.9)} \Rightarrow \int_{\Omega} f(x) \, dx + \int_{\partial\Omega} g(x) \, d\sigma(x) = 0.$$

Cette condition porte le nom de relation de compatibilité entre  $f$  et  $g$ .

**Preuve :** Il suffit de choisir  $v = 1$  dans (4.9).

**Remarque 14** La contraposée de ce résultat, montre que pour avoir existence d'une solution il est nécessaire d'imposer la relation de compatibilité.

**Théorème 15** Soit  $f \in L^2(\Omega)$  et  $g \in L^2(\partial\Omega)$  satisfaisant la relation de compatibilité suivante

$$\int_{\Omega} f(x) dx + \int_{\partial\Omega} g(x) d\sigma(x) = 0, \quad (4.10)$$

alors il existe une unique solution faible  $u \in H^1(\Omega)$  satisfaisant  $\int_{\Omega} u(x) dx = 0$  et

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx - \int_{\partial\Omega} g(x) v(x) d\sigma(x) = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega), \quad (4.11)$$

de plus il existe  $C$  ne dépendant que de  $\Omega$  telle que

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left( \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \right).$$

Preuve faite en cours à écrire

#### 4.4 Régularité et principe du maximum

On énonce les deux résultats suivants qui seront admis en IMAT, voir preuve cours master 1 fondamental [8].

**Théorème 16** Soit  $k \in \mathbb{N}$ , on suppose que  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) de classe  $C^{k+2}$ .

Soit  $u \in H_0^1(\Omega)$  tel que  $\Delta u \in H^k(\Omega)$  (avec la convention  $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ ), alors

$$u \in H^{k+2}(\Omega).$$

De plus, il existe  $C$  ne dépendant que de  $\Omega$  telle que

$$\|u\|_{H^{k+2}(\Omega)} \leq C \|\Delta u\|_{H^k(\Omega)}.$$

**Théorème 17 (Principe du maximum faible)** Soit  $u \in H^1(\Omega)$  telle que

$$\begin{cases} -\Delta u \leq 0 & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \\ \gamma(u) \leq 0 & \text{presque partout sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

alors  $u \leq 0$  presque partout dans  $\Omega$ .

## Chapitre 5

# Approximation des problèmes elliptiques par éléments finis

### 5.1 Introduction, un exemple simple

On se place en dimension 1 avec le problème modèle suivant

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), & x \in ]0, 1[, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \quad (5.1)$$

où  $f \in L^2(]0, 1[)$  est une fonction donnée.

Pour obtenir une approximation de  $u$ , on peut, par exemple, chercher une collection finie et pertinente de valeurs ou d'approximations de valeurs de la solution exacte.

Pour cela, on se donne  $N \in \mathbb{N}^*$  et on construit un maillage uniforme de  $]0, 1[$ , c'est à dire une collection d'intervalles recouvrant  $]0, 1[$  sauf en quelques points :

$$\Omega = \cup_{i=1}^N M_{i-1/2} = \cup_{i=1}^N ]x_{i-1}, x_i[,$$

où pour tout  $i = 0, \dots, N$ ,  $x_i = i \Delta x$  avec  $\Delta x = 1/N$ . Ce dernier est appelé le pas d'espace, c'est la distance entre deux points consécutifs. Ici, le pas d'espace est choisi constant c'est pourquoi on dit que le maillage est uniforme, toutefois il pourrait être choisi de longueur variable dans le domaine.

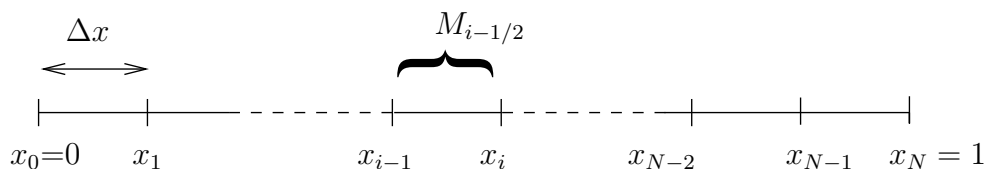


Figure 5.1: Maillage uniforme de  $]0, 1[$

Il existe trois grandes catégories de méthodes d'approximation de la solution d'une équation aux dérivées partielles, les méthodes de type :

- différences finies,
- volumes finis,
- éléments finis.

Nous allons voir sur cet exemple simple, le principe de chaque méthode. Puis nous étudierons plus en détails les méthodes éléments finis qui font l'objet de ce cours.

### 5.1.1 Méthodes de type différences finis

On cherche une approximation de la solution aux noeuds du maillage, c'est à dire en les points  $x_i$  pour  $i = 0, \dots, N$ . On a alors

$$u(x_i) \approx u_i, \text{ pour } i = 0, \dots, N.$$

En utilisant les conditions aux limites, on peut déjà poser

$$u_0 = u_N = 0.$$

Il reste à trouver le problème approché dont le vecteur  $(u_1, \dots, u_{N-1})$  est solution.

Soit  $i = 1, \dots, N-1$ , on écrit l'équation à discrétiser en  $x_i$ , on a

$$-u''(x_i) = f(x_i),$$

on écrit alors un développement de Taylor en  $x_{i-1}$  et  $x_{i+1}$  :

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + \Delta x u'(x_i) + \frac{\Delta x^2}{2} u''(x_i) + \frac{\Delta x^3}{3} u^{(3)}(x_i) + \mathcal{O}(\Delta x^4),$$

$$u(x_{i-1}) = u(x_i) - \Delta x u'(x_i) + \frac{\Delta x^2}{2} u''(x_i) - \frac{\Delta x^3}{3} u^{(3)}(x_i) + \mathcal{O}(\Delta x^4).$$

La somme de ces deux équations, nous donne

$$u(x_{i+1}) + u(x_{i-1}) = 2u(x_i) + \Delta x^2 u''(x_i) + \mathcal{O}(\Delta x^4),$$

soit encore

$$-u''(x_i) = \frac{-u(x_{i+1}) + 2u(x_i) - u(x_{i-1}))}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2).$$

On néglige le terme d'erreur, et on obtient le problème approché suivant

$$\frac{-u_{i+1} + 2u_i - u_{i-1}}{\Delta x^2} = f_i,$$

où  $f_i$  est une approximation connue (puisque  $f$  est connue) de  $f(x_i)$ . Si  $f$  est continue, on peut choisir  $f_i = f(x_i)$ , si  $f$  est  $L^2(]0, 1[)$  on peut choisir

$$f_i = \frac{1}{\Delta x} \int_{(i-1/2)\Delta x}^{(i+1/2)\Delta x} f(x) dx.$$

Il est important de noter que dans le problème approché, on a remplacé la solution exacte par la solution approchée.

En écrivant chacune des équations, on obtient un système linéaire, donné par

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{pmatrix} = \Delta x^2 \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix} \Leftrightarrow AU = \Delta x^2 F. \quad (5.2)$$

**Remarque 15** 1. Le problème approché (5.2) est de dimension finie alors que le problème continu (5.1) est de dimension infinie. On a donc un problème bien plus simple à résoudre.

2. Il faut s'assurer que le problème approché admet une unique solution comme le problème continu. Pour cela, il suffit de montrer que la matrice  $A$  est inversible, nous le ferons en travaux dirigés.

3. Il faut également s'assurer que la méthode converge lorsque le nombre de points tend vers l'infini ( $N \rightarrow +\infty$ ). C'est à dire, ici, que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \max_{i=1}^{N-1} |u(x_i) - u_i| = 0.$$

4. Cette méthode se généralise en dimension supérieure avec des maillages cartésiens (rectangles en dimension 2, cubes en dimension 3...) Les maillages non cartésiens sont possibles mais c'est beaucoup plus compliqué.

### 5.1.2 Méthodes de type volumes finis

Pour ce type de méthode, on se donne une inconnue par mailles  $M_{i-1/2}$ ,  $i = 1, \dots, N$  et on approche la solution exacte  $u$  par une fonction constante par maille.

$$u(x) \approx u_{app}(x) = u_{i-1/2}, \text{ si } x \in M_{i-1/2}, i = 1, \dots, N.$$

On a alors  $N$  inconnues, il nous faut  $N$  équations pour les déterminer. Pour cela, on intègre l'équation à discrétiser sur chacune des mailles  $M_{i-1/2}$ , on obtient :

$$-\int_{x_{i-1}}^{x_i} u''(x) dx = -u'(x_i) + u'(x_{i-1}) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx =: \Delta x f_{i-1/2}.$$

Il reste à approcher  $u'(x_i)$  appelé flux entre les mailles  $M_{i-1/2}$  et  $M_{i+1/2}$ . Il représente la quantité de  $u$  passant de la maille  $M_{i-1/2}$  à la maille  $M_{i+1/2}$ . On introduit les centres de mailles  $x_{i-1/2} = (x_i + x_{i-1})/2$  et on utilise, à nouveau, un développement de Taylor

$$\begin{aligned} u(x_{i+1/2}) &= u(x_i) + \frac{\Delta x}{2} u'(x_i) + \frac{\Delta x^2}{8} u''(x_i) + \mathcal{O}(\Delta x^3), \\ u(x_{i-1/2}) &= u(x_i) - \frac{\Delta x}{2} u'(x_i) + \frac{\Delta x^2}{8} u''(x_i) + \mathcal{O}(\Delta x^3). \end{aligned}$$

La différence de ces deux équations, nous donne

$$u(x_{i+1/2}) - u(x_{i-1/2}) = \Delta x u'(x_i) + \mathcal{O}(\Delta x^3),$$

soit encore

$$u'(x_i) = \frac{u(x_{i+1/2}) - u(x_{i-1/2})}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2).$$

On néglige le terme d'erreur et on obtient le problème approché suivant (pour les points intérieurs au maillage)

$$-\frac{u_{i+1/2} - u_{i-1/2}}{\Delta x} + \frac{u_{i-1/2} - u_{i-3/2}}{\Delta x} = -\frac{u_{i+1/2} - 2u_{i-1/2} + u_{i-3/2}}{\Delta x} = \Delta x f_{i-1/2},$$

on retrouve le système linéaire (5.2).

**Remarque 16** 1. *En général, les méthodes de différences finies et volumes finis donnent des schémas différents. C'est notamment le cas si le maillage n'est plus uniforme, c'est à dire si le pas d'espace n'est plus constant.*

2. *Cette méthode se généralise très bien en dimension supérieure avec des maillages non nécessairement cartésiens (par exemple triangulaires).*

### 5.1.3 Méthodes de type éléments finis

C'est la méthode la plus utilisée pour les problèmes elliptiques dans les codes industriels.

La méthode des éléments finis est basée sur la formulation variationnelle du problème. Ici, on rappelle que celle ci est donnée par

$$\text{Trouver } u \in H_0^1(]0, 1[) \text{ tel que } a(u, v) = L(v) \text{ pour tout } v \in H_0^1(]0, 1[),$$

où

$$a(u, v) = \int_0^1 u'(x) v'(x) dx \quad \text{et} \quad L(v) = \int_0^1 f(x) v(x) dx.$$

L'espace  $V = H_0^1(]0, 1[)$  est un espace de dimension infinie. On remplace ce problème par un problème approché dans un espace de dimension finie.

$$\text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que } a(u_h, v_h) = L(v_h) \text{ pour tout } v_h \in V_h,$$

où  $V_h \subset H_0^1(\Omega)$  est un espace de dimension finie.

**Remarque 17** *Nous verrons que pour que la méthode donne une bonne approximation il est nécessaire que l'espace d'approximation  $V_h$  soit contenu dans l'espace auquel appartient la solution exacte  $V$ . On dit que  $V_h$  est  $V$  conforme.*

Il faut alors choisir convenablement  $V_h$ . Pour cela, nous verrons qu'on se sert de l'interpolation de Lagrange.

## 5.2 Principes généraux d'approximation variationnelle

Dans ce paragraphe, nous allons voir des principes généraux d'approximation variationnelle qui vont nous permettre de comprendre comment choisir l'espace d'approximation  $V_h$  pour construire une bonne approximation de la solution exacte.



Soit  $V$  un espace de Hilbert, on note  $(\cdot, \cdot)_V$  son produit scalaire et  $\|\cdot\|_V$  la norme associée. On suppose que  $V_h$  est un sous espace vectoriel de dimension finie de  $V$ .

On considère  $a$  une forme bilinéaire, continue et coercive sur  $V \times V$  et  $L \in V'$ . Et on introduit les problèmes variationnels suivants

$$(FV) \quad \text{Trouver } u \in V \text{ tel que } a(u, v) = L(v) \text{ pour tout } v \in V,$$

$$(FV)_h \quad \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que } a(u_h, v_h) = L(v_h) \text{ pour tout } v \in V_h.$$

Nous avons vu dans le chapitre précédent que d'après le Théorème de Lax-Milgram le problème variationnel  $(FV)$  admet une unique solution. De même,  $V_h$ , muni du produit scalaire de  $V$ , est un espace de Hilbert et le Théorème de Lax-Milgram permet d'établir l'existence et l'unicité d'une solution du problème variationnel  $(FV)_h$ . Nous allons quand même voir une démonstration directe de ce résultat qui nous sera utile pour mieux comprendre la suite.

**Proposition 3** *Le problème  $(FV)_h$  admet une unique solution de plus il est équivalent à la résolution d'un système linéaire*

$$A_h U_h = B_h.$$

**Preuve :** Puisque  $V_h$  est de dimension finie, il admet une base. Notons  $N_h = \dim V_h$  et  $\mathcal{B}_h = (\phi_1, \dots, \phi_{N_h})$  une base de  $V_h$ . Tous les éléments de  $V_h$  se décomposent dans la base  $\mathcal{B}_h$  y compris la solution de  $(FV)_h$ . On a donc

$$u_h = \sum_{j=1}^{N_h} u_j \phi_j,$$

et

$$\begin{aligned} (FV)_h &\Leftrightarrow \text{Trouver } (u_1, \dots, u_{N_h}) \in \mathbb{R}^{N_h} \text{ tel que } \sum_{j=1}^{N_h} u_j a(\phi_j, v_h) = L(v_h), \forall v_h \in V_h, \\ &\Leftrightarrow \text{Trouver } (u_1, \dots, u_{N_h}) \in \mathbb{R}^{N_h} \text{ tels que } \sum_{j=1}^{N_h} u_j a(\phi_j, \phi_i) = L(\phi_i), \forall i = 1, \dots, N_h, \\ &\Leftrightarrow A_h U_h = B_h. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} A_h = (a_{i,j}) = (a(\phi_j, \phi_i)) \in \mathbb{R}^{N_h \times N_h}, \quad U_h = (u_1, \dots, u_{N_h})^T \in \mathbb{R}^{N_h}, \\ B_h = (L(\phi_1), \dots, L(\phi_{N_h}))^T \in \mathbb{R}^{N_h}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Pour montrer qu'il existe une unique solution à ce problème, il suffit de montrer que  $A_h$  est inversible, soit que  $A_h$  est bijective. Le problème étant de dimension finie  $A_h$  est bijective si et seulement si  $A_h$  est surjective ou si et seulement si  $A_h$  est injective.

Montrons l'injection. Le problème étant linéaire, il suffit de montrer que la seule solution pour  $L \equiv 0$  est le vecteur nul  $(0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{N_h}$ .

Si  $L \equiv 0$  alors

$$\sum_{j=1}^{N_h} u_j a(\phi_j, \phi_i) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, N_h,$$

et donc en multipliant par  $u_i$  et en sommant sur  $i$ , il vient

$$\sum_{i=1}^{N_h} \sum_{j=1}^{N_h} u_i u_j a(\phi_j, \phi_i) = 0.$$

En utilisant la bilinéarité de  $a$  et sa coercivité, on obtient

$$0 = a\left(\sum_{i=1}^{N_h} u_i \phi_i, \sum_{j=1}^{N_h} u_j \phi_j\right) = a(u_h, u_h) \geq \alpha \|u_h\|_V^2,$$

ainsi dans  $V_h$ , on a  $u_h = \sum_{i=1}^{N_h} u_i \phi_i = 0$ .

Mais  $(\phi_1, \dots, \phi_{N_h})$  étant une base, c'est une famille libre et donc

$$u_i = 0, \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, N_h.$$

On va maintenant évaluer l'erreur commise quand on approche  $u$  par  $u_h$ .

**Lemme 1 (Lemme de Céa)** *Soit  $V$  un espace de Hilbert, on note  $(\cdot, \cdot)_V$  son produit scalaire et  $\|\cdot\|_V$  la norme associée. On suppose que  $V_h$  est un sous espace vectoriel de dimension finie de  $V$  ( $V_h$  est donc  $V$  conforme). On considère  $a$  une forme bilinéaire, continue et coercive sur  $V \times V$  et  $L \in V'$ , et on note  $u$  la solution de  $(FV)$  et  $u_h$  celle de  $(FV)_h$ . Alors*

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V, \quad (5.4)$$

où  $M$  et  $\alpha$  sont respectivement les constantes de continuité et de coercivité de  $a$ .

De plus, l'infimum est atteint, c'est le projeté de  $u$  sur  $V_h$ , on le note  $\pi_{V_h}(u)$  et

$$\|u - \pi_{V_h}(u)\|_V = \min_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V = \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V.$$

**Preuve :** Soit  $v_h \in V_h$ , on pose  $w_h = v_h - u_h \in V_h \subset V$ , alors

$$a(u - u_h, w_h) = a(u, w_h) - a(u_h, w_h) = L(w_h) - L(w_h) = 0,$$

et ainsi

$$a(u - u_h, v_h - u_h) = a(u - u_h, v_h - u + u - u_h) = a(u - u_h, v_h - u) + a(u - u_h, u - u_h) = 0.$$

En utilisant la continuité et la coercivité de  $a$ , on a

$$\alpha \|u - u_h\|_V^2 \leq a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - v_h) \leq M \|u - u_h\|_V \|u - v_h\|_V,$$

et donc

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{M}{\alpha} \|u - v_h\|_V,$$

pour tout  $v_h \in V_h$ , ce qui donne en particulier (5.4).

Montrons maintenant que l'infimum est atteint. Pour cela, on introduit

$$\begin{aligned} J : V_h &\rightarrow \mathbb{R} \\ v_h &\mapsto \|u - v_h\|_V^2 \end{aligned}$$

Remarquons tout d'abord que la différentielle de  $J$  en un point  $w$  de  $V_h$  est donnée par

$$\begin{aligned} DJ(w) : V_h &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto DJ(w) \cdot v = -2(u - w, v)_V \end{aligned}$$

Alors pour tout  $w$  et  $v$  dans  $V_h$ , on a

$$\begin{aligned} J(v) &= \|u - v\|_V^2 = \|u - w + w - v\|_V^2 = (u - w + w - v, u - w + w - v)_V, \\ &= \|u - w\|_V^2 + 2(u - w, w - v)_V + \|w - v\|_V^2 \\ &= J(w) + DJ(w) \cdot (v - w) + \|w - v\|_V^2, \\ &\geq J(w) + DJ(w) \cdot (v - w). \end{aligned}$$

Ainsi, l'équation d'Euler qui est nécessaire pour l'existence d'un minimum est ici suffisante. En effet, si  $w$  est un point critique, i.e. satisfaisant  $DJ(w) \equiv 0$ , alors

$$J(v) \geq J(w) + DJ(w) \cdot (v - w) = J(w).$$

pour tout  $v \in V_h$  et  $w$  est un minimum.

Il reste à montrer l'existence et l'unicité d'un point critique. On cherche donc  $w \in V_h$  espace de Hilbert tel que pour tout  $v \in V_h$

$$DJ(w) \cdot v = -2(u - w, v)_V = 0,$$

soit encore  $w \in V_h$  tel que pour tout  $v \in V_h$

$$(w, v)_V = (u, v)_V.$$

On pose  $a(w, v) = (w, v)_V$  et  $L(v) = (u, v)_V$ . Alors,  $a$  est clairement bilinéaire, continue et coercive et  $L$  est linéaire et continue. Le théorème de Lax-Milgram permet alors de conclure.

**Remarque 18 (Conclusion)** *Les résultats démontrés précédemment nous permettent de mieux comprendre comment choisir  $V_h$ .*

*Il faudra choisir  $V_h$  de sorte que*

*1. la méthode converge, c'est à dire que*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - \pi_{V_h}(u)\|_V = 0,$$

2. l'on sache trouver facilement une base de  $V_h$  et calculer simplement  $A_h$  et  $B_h$ .
3. la matrice  $A_h$  soit la plus creuse possible, c'est à dire que les coefficients  $a(\phi_j, \phi_i)$  soient nuls pour un grand nombre de couple  $(i, j)$ . Il faut donc que les fonctions de base aient un petit support.

Nous allons voir dans le paragraphe suivant que nous utiliserons l'interpolation de Lagrange pour choisir  $V_h$ .

### 5.3 Eléments finis de Lagrange en dimension une

Nous allons voir sur l'exemple de l'introduction comment choisir l'espace d'approximation  $V_h$ .

On rappelle que le problème est

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), & x \in ]0, 1[, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \quad (5.5)$$

où  $f \in L^2(]0, 1[)$  est une fonction donnée.

Sa formulation variationnelle est donnée par

$$\text{Trouver } u \in H_0^1(]0, 1[) \text{ tel que } a(u, v) = L(v) \text{ pour tout } v \in H_0^1(]0, 1[), \quad (5.6)$$

où

$$a(u, v) = \int_0^1 u'(x) v'(x) dx \quad \text{et} \quad L(v) = \int_0^1 f(x) v(x) dx.$$

Le maillage est choisi uniforme

$$]0, 1[ = \Omega = \cup_{i=1}^N M_{i-1/2} = \cup_{i=1}^N ]x_{i-1}, x_i[,$$

où  $N \in \mathbb{N}^*$  est donné et où pour tout  $i = 0, \dots, N$ ,  $x_i = i \Delta x$  avec  $h = \Delta x = 1/N$ , le pas d'espace.

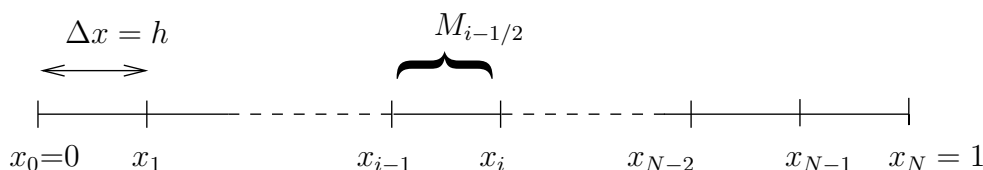


Figure 5.2: Maillage uniforme de  $]0, 1[$

On approche le problème continu par

$$\text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que } a(u_h, v_h) = L(v_h) \text{ pour tout } v_h \in V_h, \quad (5.7)$$

où  $V_h \subset H_0^1(\Omega)$  est un espace de dimension finie.

Pour construire une bonne approximation de la solution exacte, on utilise l'interpolation polynômiale de Lagrange. Je rappelle que cela consiste à approcher une fonction par un polynôme. Avec la méthode des éléments finis, on approche la solution exacte par un polynôme sur chaque cellule du maillage.

### 5.3.1 Eléments finis de degré 1

Ici, on choisit  $V_h = V_h^1$  donné par l'ensemble des fonctions continues affines par morceaux sur les segments  $[x_i, x_{i+1}]$  :

$$V_h^1 = \left\{ v \in C([0, 1]) ; v(0) = v(1) = 0 \text{ et } v|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{R}^1[X], \quad \forall i = 0, \dots, N - 1 \right\}, \tag{5.8}$$

où  $\mathbb{R}^1[X]$  est l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 1.

On montre alors le résultat suivant

**Proposition 4** *L'espace  $V_h^1$  donné par (5.8) est  $H_0^1(]0, 1[)$  conforme. Sa dimension est  $N - 1$  et une base de cet espace est donnée par  $(\phi_1, \dots, \phi_{N-1})$  où pour tout  $i = 1, \dots, N - 1$ , les fonctions  $\phi_i$  sont caractérisées par*

$$\phi_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad \text{pour tout } j = 1, \dots, N - 1 \tag{5.9}$$

où  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker ( $\delta_{ij} = 1$  si  $i = j$  et  $\delta_{ij} = 0$  sinon).

Elles sont données explicitement par

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{\Delta x}, & \text{si } x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ \frac{x_{i+1} - x}{\Delta x}, & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{5.10}$$

Les fonctions  $\phi_i$  sont appelées dans la littérature, fonctions de base éléments finis (de degré 1) ou fonctions de forme ou encore fonctions "chapeau".

**Remarque 19** *Ces fonctions de base ont un support très localisé puisqu'elles ne sont nulles que sur deux mailles consécutives. Ainsi, la matrice  $A_h$  sera très creuse, ce sera une matrice bande de largeur 3.*

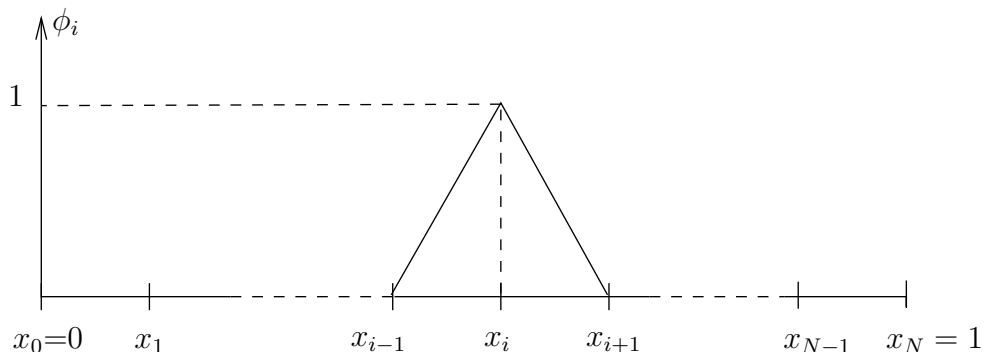


Figure 5.3: Fonctions de base éléments finis de degré 1,  $H_0^1(]0, 1[)$  conforme.

**Preuve de la Proposition 4 :** Montrons, tout d'abord, que toute fonction de  $V_h^1$  est dans  $H_0^1(]0, 1[)$ . Soit  $v \in V_h^1$ , alors  $v \in C([0, 1])$  et donc

$$\left( \int_0^1 |v(x)|^2 dx \right)^{1/2} \leq \sup_{x \in [0, 1]} |v(x)| = \|v\|_{C([0, 1])},$$

et  $v$  est dans  $L^2(]0, 1[)$ .

Calculons la dérivée de  $v$  dans  $\mathcal{D}'(]0, 1[)$ . Tout d'abord, notons que pour tout  $i = 0, \dots, N$ ,  $v(x) = a_i x + b_i$  pour tout  $x \in [x_i, x_{i+1}]$  où les  $a_i$  et  $b_i$  sont des constantes réelles données satisfaisant  $a_i x_{i+1} + b_i = a_{i+1} x_{i+1} + b_{i+1}$ .

Soit  $\varphi \in \mathcal{D}(]0, 1[)$ ,

$$\langle v', \varphi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = - \langle v, \varphi' \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}.$$

Mais  $v$  est continue sur  $[0, 1]$  donc  $L^1(]0, 1[)$  et

$$\langle v', \varphi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = - \int_0^1 v(x) \varphi'(x) dx = - \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (a_i x + b_i) \varphi'(x) dx.$$

En intégrant par partie, on obtient

$$\begin{aligned} \langle v', \varphi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} &= \sum_{i=0}^{N-1} \left( - \left[ (a_i x + b_i) \varphi(x) \right]_{x_i}^{x_{i+1}} + \int_{x_i}^{x_{i+1}} a_i \varphi(x) dx \right), \\ &= - \sum_{i=0}^{N-1} (a_i x_{i+1} + b_i) \varphi(x_{i+1}) + \sum_{i=0}^{N-1} (a_i x_i + b_i) \varphi(x_i) + \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} a_i \varphi(x) dx, \\ &= - \sum_{i=0}^{N-2} (a_{i+1} x_{i+1} + b_{i+1}) \varphi(x_{i+1}) + \sum_{i=1}^{N-1} (a_i x_i + b_i) \varphi(x_i) + \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} a_i \varphi(x) dx, \end{aligned}$$

car  $\varphi(x_0) = \varphi(0) = 0 = \varphi(1) = \varphi(x_N)$  et  $a_i x_{i+1} + b_i = a_{i+1} x_{i+1} + b_{i+1}$ .

En effectuant un changement d'indice dans la première somme, il vient

$$\begin{aligned} \langle v', \varphi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} &= - \sum_{i=1}^{N-1} (a_i x_i + b_i) \varphi(x_i) + \sum_{i=1}^{N-1} (a_i x_i + b_i) \varphi(x_i) \\ &\quad + \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} a_i \varphi(x) dx = \int_0^1 \left( \sum_{i=0}^{N-1} \mathbb{1}_{]x_i, x_{i+1}[}(x) a_i \right) \varphi(x) dx, \end{aligned}$$

où  $\mathbb{1}_{]x_i, x_{i+1}[}(x)$  est l'indicatrice de l'intervalle  $]x_i, x_{i+1}[$  c'est à dire la fonction qui vaut 1 si  $x \in ]x_i, x_{i+1}[$ , 0 sinon.

On vient de montrer que

$$v' = \sum_{i=0}^{N-1} \mathbb{1}_{]x_i, x_{i+1}[}(x) a_i, \quad \text{dans } \mathcal{D}'(]0, 1[)$$

Or, cette fonction est clairement  $L^2(]0, 1[)$  donc  $v \in H^1(]0, 1[)$ . Puisque  $v(0) = v(1) = 0$ , on a  $v \in H_0^1(]0, 1[)$ .

Ce qui montre que  $V_h^1$  est  $H_0^1(]0, 1[)$  conforme.

Déterminons la dimension de  $V_h^1$ . Remarquons que si  $v \in V_h^1$ , alors  $v(x) = a_i x + b_i$  pour  $x \in [x_i, x_{i+1}]$ ,  $i = 0, \dots, N - 1$ . Ainsi,  $2N$  constantes sont à fixer pour déterminer complètement  $v$ . Notons alors que puisque  $v(0) = v(1) = 0$  et que  $v$  est continue, on a  $a_i x_{i+1} + b_i = a_{i+1} x_{i+1} + b_{i+1}$  pour  $i = 1, \dots, N - 1$ . On a donc  $2 + N - 1 = N + 1$  relations. Ainsi, le nombre de degrés de liberté, et donc la dimension de  $V_h^1$ , est de  $2N - (N + 1) = N - 1$ . Ceci correspond aux nombres de noeuds du maillage à l'intérieur du domaine. Cherchons une base de  $V_h^1$ . On introduit, les fonctions  $\phi_i \in V_h^1$  pour  $i = 1, \dots, N - 1$  définies par (5.9). La fonction  $\phi_i$  étant continue, affine par morceaux et  $\phi_i(x_j) = 0$  pour tout  $j \leq x_{i-1}$  ou  $j \geq i + 1$ , on a  $\phi_i(x) = 0$  pour  $x \leq x_{i-1}$  ou  $x \geq x_{i+1}$ .

Il reste à déterminer  $\phi_i$  sur les intervalles  $[x_{i-1}, x_i]$  et  $[x_i, x_{i+1}]$ . Sur  $[x_{i-1}, x_i]$ ,  $\phi_i$  est un polynôme de degré 1 et  $\phi_i(x_{i-1}) = 0$  et  $\phi_i(x_i) = 1$ , on a donc  $\phi_i(x) = (x - x_{i-1})/\Delta x$ . De même, sur  $[x_i, x_{i+1}]$ , on a  $\phi_i(x) = (x_{i+1} - x)/\Delta x$ .

La famille des  $(\phi_1, \dots, \phi_{N-1})$  comporte  $N - 1$  éléments, montrons qu'elle est libre ce qui établira que c'est bien une base de  $V_h^1$ .

Soient  $(\lambda_1, \dots, \lambda_{N-1}) \in \mathbb{R}^{N-1}$  tels que

$$\sum_{i=1}^{N-1} \lambda_i \phi_i = 0 \text{ dans } V_h^1.$$

On écrit cette égalité pour tout  $x_j$ ,  $j = 1, \dots, N - 1$ , il vient

$$\sum_{i=1}^{N-1} \lambda_i \phi_i(x_j) = \sum_{i=1}^{N-1} \lambda_i \delta_{ij} = \lambda_j = 0.$$

Ce qui montre que la famille est libre et termine la démonstration du théorème 4.

Montrons maintenant le lemme suivant qui permet de déterminer le système linéaire.

**Lemme 2** *Lorsque  $V_h = V_h^1$  où  $V_h^1$  est donné par (5.8), le problème variationnel approché (5.7) est équivalent au système linéaire suivant*

Trouver  $(u_1, \dots, u_{N-1}) \in \mathbb{R}^{N-1}$  tel que

$$\sum_{i=1}^{N-1} u_i a(\phi_i, \phi_j) = L(\phi_j) \text{ pour tout } j = 1, \dots, N - 1. \tag{5.11}$$

**Preuve :**

On approche  $u$  par une fonction de  $V_h^1$ , donc

$$u \approx u_h = \sum_{i=1}^{N-1} u_i \phi_i(x). \tag{5.12}$$

On remplace  $u_h$  par sa valeur dans (5.7), on obtient

$$\text{Trouver } (u_1, \dots, u_{N-1}) \in \mathbb{R}^{N-1} \text{ tel que } \sum_{i=1}^{N-1} u_i a(\phi_i, v_h) = L(v_h) \text{ pour tout } v_h \in V_h^1,$$

soit encore (5.11), puisque  $(\phi_1, \dots, \phi_{N-1})$  est une base. Nous verrons en travaux dirigés que ce système linéaire est en fait le système (5.2).

On termine ce paragraphe avec le résultat d'estimation d'erreur et donc de convergence suivant

**Théorème 18** *Soit  $f \in L^2(]0, 1[)$  et  $u \in H_0^1(]0, 1[)$  la solution variationnelle de (5.5). On considère  $u_h \in V_h^1$ , donnée par (5.12), (5.11). Alors*

$$\|u - u_h\|_{H^1(]0, 1[)} \leq 2\sqrt{2}h \|f\|_{L^2(]0, 1[)}, \quad (5.13)$$

où l'on rappelle que  $h = \Delta x$  est la taille du maillage.

**Preuve :**

On commence par introduire la notion d'**interpolé de Lagrange** qui nous sera utile pour démontrer le résultat précédent.

**Définition 9** *Soit  $u \in H_0^1(]0, 1[)$ , on appelle interpolé de Lagrange (de degré 1) de  $u$ , la fonction, notée  $\pi_{h,1}(u)$  définie par*

$$\pi_{h,1}(u)(x) = \sum_{i=1}^{N-1} u(x_i) \phi_i(x).$$

*C'est l'unique fonction de  $V_h^1$  qui prend les mêmes valeurs que  $u$  aux noeuds  $(x_i)_{i=0, \dots, N}$  du maillage.*

D'après le Lemme de Céa (Lemme 1), puisque  $\pi_{h,1}(u) \in V_h^1$ , on a

$$\|u - u_h\|_{H^1(]0, 1[)} \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h^1} \|u - v_h\|_{H^1(]0, 1[)} \leq \frac{M}{\alpha} \|u - \pi_{h,1}(u)\|_{H^1(]0, 1[)}, \quad (5.14)$$

où  $M = 1$  et  $\alpha = 1/2$  sont les constantes de continuité et de coercivité de  $a$ .

On montre alors le résultat suivant

**Lemme 3** *Pour tout  $v \in H^2(]0, 1[) \cap H_0^1(]0, 1[)$ , on a*

$$\|v - \pi_{h,1}(v)\|_{L^2(]0, 1[)} \leq h^2 \|v''\|_{L^2(]0, 1[)}, \quad \|v' - \pi'_{h,1}(v)\|_{L^2(]0, 1[)} \leq h \|v''\|_{L^2(]0, 1[)}.$$

**Preuve :** Soit  $v \in H^2(]0, 1[) \cap H_0^1(]0, 1[)$ , alors

$$\begin{aligned} \|v - \pi_{h,1}(v)\|_{L^2(]0, 1[)}^2 &= \int_0^1 \left( v(x) - \pi_{h,1}(v)(x) \right)^2 dx, \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left( v(x) - \sum_{i=1}^{N-1} v(x_i) \phi_i(x) \right)^2 dx, \\ &= \int_0^{x_1} \left( v(x) - v(x_1) \phi_1(x) \right)^2 dx + \int_{x_{N-1}}^1 \left( v(x) - v(x_{N-1}) \phi_{N-1}(x) \right)^2 dx \\ &\quad + \sum_{j=1}^{N-2} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left( v(x) - v(x_j) \phi_j(x) - v(x_{j+1}) \phi_{j+1}(x) \right)^2 dx, \end{aligned}$$



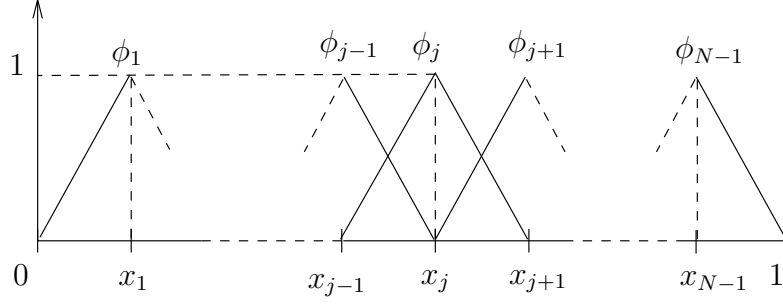


Figure 5.4: Localisation des supports des fonctions de formes de degré 1.

ceci car chaque fonction de base a un support localisé sur deux mailles (voir figure ci-dessous)

En remplaçant les fonctions de forme par leur expression et en remarquant que  $v(x_0) = v(0) = 0$  et que  $v(x_N) = v(1) = 0$ , on obtient

$$\begin{aligned} \|v - \pi_{h,1}(v)\|_{L^2([0,1])}^2 &= \int_0^{x_1} \left( v(x) - v(x_0) - (v(x_1) - v(x_0)) \frac{x}{h} \right)^2 dx \\ &+ \int_{x_{N-1}}^1 \left( v(x) - v(x_{N-1}) - (v(x_N) - v(x_{N-1})) \frac{x - (1-h)}{h} \right)^2 dx \\ &+ \sum_{j=1}^{N-2} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left( v(x) - v(x_j) \frac{x_{j+1} - x}{h} - v(x_{j+1}) \frac{x - x_j}{h} \right)^2 dx. \end{aligned}$$

Mais  $x_{j+1} = x_j + h$ ,  $x_0 = 0$  et  $x_{N-1} = 1 - h$ , donc

$$\begin{aligned} \|v - \pi_{h,1}(v)\|_{L^2([0,1])}^2 &= \int_0^{x_1} \left( v(x) - v(x_0) - (v(x_1) - v(x_0)) \frac{x - x_0}{h} \right)^2 dx \\ &+ \int_{x_{N-1}}^1 \left( v(x) - v(x_{N-1}) - (v(x_N) - v(x_{N-1})) \frac{x - x_{N-1}}{h} \right)^2 dx \\ &+ \sum_{j=1}^{N-2} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left( v(x) - v(x_j) - (v(x_{j+1}) - v(x_j)) \frac{x - x_j}{h} \right)^2 dx, \end{aligned}$$

ce qui s'écrit encore

$$\|v - \pi_{h,1}(v)\|_{L^2([0,1])}^2 = \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left( v(x) - v(x_j) - (v(x_{j+1}) - v(x_j)) \frac{x - x_j}{h} \right)^2 dx. \tag{5.15}$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\|v - \pi_{h,1}(v)\|_{L^2(]0,1])}^2 &= \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left( \int_{x_j}^x v'(y) dy - \int_{x_j}^{x_{j+1}} v'(t) dy \frac{x - x_j}{h} \right)^2 dx, \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left( \frac{1}{h} \int_{x_j}^x \int_{x_j}^{x_{j+1}} (v'(t) - v'(y)) dt dy \right)^2 dx, \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left( \frac{1}{h} \int_{x_j}^x \int_{x_j}^{x_{j+1}} \int_y^t v''(\theta) d\theta dt dy \right)^2 dx, \\
&\leq \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left( \frac{1}{h} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \int_{x_j}^{x_{j+1}} |v''(\theta)| d\theta dt dy \right)^2 dx, \\
&\leq \sum_{j=0}^{N-1} h \left( h \int_{x_j}^{x_{j+1}} |v''(\theta)| d\theta \right)^2 \leq \sum_{j=0}^{N-1} h^4 \int_{x_j}^{x_{j+1}} |v''(\theta)|^2 d\theta,
\end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Et ainsi

$$\|v - \pi_{h,1}(v)\|_{L^2(]0,1])}^2 \leq h^4 \|v''\|_{L^2(]0,1])}^2.$$

Pour l'autre inégalité, on procède de même. On reprend (5.15) en dérivant les termes sous le carré, on obtient

$$\begin{aligned}
\|v' - \pi_{h,1}(v)'\|_{L^2(]0,1])}^2 &= \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left( v'(x) - \frac{v(x_{j+1}) - v(x_j)}{h} \right)^2 dx, \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left( v'(x) - \frac{1}{h} \int_{x_j}^{x_{j+1}} v'(t) dt \right)^2 dx, \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left( \frac{1}{h} \int_{x_j}^{x_{j+1}} (v'(x) - v'(t)) dt \right)^2 dx, \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left( \frac{1}{h} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \int_t^x v''(\theta) d\theta dt \right)^2 dx, \\
&\leq \sum_{j=0}^{N-1} h \left( \int_{x_j}^{x_{j+1}} |v''(\theta)| d\theta \right)^2 \leq \sum_{j=0}^{N-1} h^2 \int_{x_j}^{x_{j+1}} |v''(\theta)|^2 d\theta \\
&= h^2 \|v''\|_{L^2(]0,1])}^2.
\end{aligned}$$

Ce qui termine la démonstration du Lemme 3.

On reprend l'estimation (5.14), on a

$$\|u - u_h\|_{H^1(]0,1])} \leq 2 \|u - \pi_{h,1}(u)\|_{H^1(]0,1])}.$$

La fonction  $u$  est la solution variationnelle du problème (5.5), ainsi,  $-u'' = f \in L^2(]0,1])$  et donc  $u \in H^2(]0,1]) \cap H_0^1(]0,1])$ , on peut donc appliquer le Lemme 3. Il vient

$$\begin{aligned}
\|u - u_h\|_{H^1(]0,1])}^2 &\leq 4 \left( \|u - \pi_{h,1}(u)\|_{L^2(]0,1])}^2 + \|u' - \pi_{h,1}(u)'\|_{L^2(]0,1])}^2 \right) \\
&\leq 4(h^4 + h^2) \|u''\|_{L^2(]0,1])}^2 \leq 8h^2 \|f\|_{L^2(]0,1])}^2,
\end{aligned}$$

car  $h \leq 1$ .

Ce qui termine la démonstration du Théorème 18.

### 5.3.2 Eléments finis de degré 2

On peut choisir une approximation d'ordre plus élevé que celle choisie dans le paragraphe précédent. Pour cela, on remplace  $\mathbb{R}^1[X]$  par  $\mathbb{R}^2[X]$  ou  $\mathbb{R}^p[X]$   $p \geq 3$ . Pour déterminer complètement les fonctions de base, il est alors nécessaire d'introduire des points supplémentaires dans chaque intervalle.

En effet, supposons que nous choisissons maintenant  $V_h = V_h^2$  avec

$$V_h^2 = \left\{ v \in C[0, 1] ; v(0) = v(1) = 0 \text{ et } v|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{R}^2[X], \quad \forall i = 0, \dots, N - 1 \right\}. \tag{5.16}$$

Les fonctions de base seront alors des polynômes de degré 2 par morceaux. Ainsi, pour la fonction de base associée au noeud  $x_i$  sur  $[x_i, x_{i+1}]$ , on aura  $\phi_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i$ . Il faut alors fixer la valeurs de  $\phi_i$  en trois points de  $[x_i, x_{i+1}]$  pour déterminer complètement  $\phi_i$ . Par commodité, ces points supplémentaires (ici un seul point) sont pris équidistribués sur l'intervalle. On introduit  $x_{i+1/2} = (x_i + x_{i+1})/2$  pour  $i = 0, \dots, N - 1$ .

Cette propriété porte le nom d'unisolvance, plus précisément on a la définition suivante

**Définition 10** *On dit que  $\{x_i, x_{i+1/2}, x_{i+1}\}$  est  $\mathbb{R}^2[X]$  unisolvant si pour 3 scalaires réels quelconques  $\alpha_i, \alpha_{i+1/2}$  et  $\alpha_{i+1}$ , il existe une unique fonction  $p$  de  $\mathbb{R}^2[X]$  satisfaisant*

$$p(x_j) = \alpha_j,$$

pour  $j = i, i + 1/2$  ou  $i + 1$ .

*On dit alors que le triplet  $([x_i, x_{i+1}], \mathbb{R}^2[X], \{x_i, x_{i+1/2}, x_{i+1}\})$  est un élément fini de Lagrange.*

On montre alors le résultat suivant

**Théorème 19**

*L'espace  $V_h^2$  donné par (5.16) est  $H_0^1(]0, 1[)$  conforme. Sa dimension est  $2N - 1$  et la base éléments finis est donnée par  $(\phi_{1/2}, \phi_1, \phi_{3/2}, \dots, \phi_{N-3/2}, \phi_{N-1}, \phi_{N-1/2})$  avec*

$$\phi_i(x) = \begin{cases} 2 \frac{(x - x_{i-1})(x - x_{i-1/2})}{\Delta x^2}, & \text{si } x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ 2 \frac{(x_{i+1} - x)(x_{i+1/2} - x)}{\Delta x^2}, & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

pour  $i = 1, \dots, N - 1$ .

Et

$$\phi_{i+1/2}(x) = \begin{cases} 4 \frac{(x_{i+1} - x)(x - x_i)}{\Delta x^2}, & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

pour  $i = 0, \dots, N - 1$ .

Ces fonctions sont représentées sur la figure 5.5, on notera la différence de support et d'allure des fonctions associées aux sommets du maillage  $x_i$  et des fonctions associées aux milieux des segments  $x_{i+1/2}$ .

**Preuve :** voir travaux dirigés

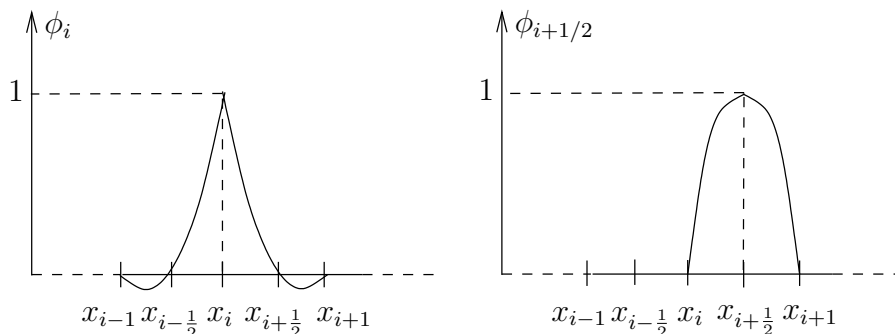


Figure 5.5: Fonctions de base éléments finis de degré 2,  $H_0^1(]0, 1[)$  conforme.

Nous montrerons également en travaux dirigés le résultat suivant

**Lemme 4** Lorsque  $V_h = V_h^2$  où  $V_h^2$  est donné par (5.16), le problème variationnel approché (5.7) est équivalent au système linéaire suivant

Trouver  $(u_{1/2}, u_1, u_{3/2}, \dots, u_{N-3/2}, u_{N-1}, u_{N-1/2}) \in \mathbb{R}^{2N-1}$  tel que

$$\sum_{i=1}^{N-1} u_i a(\phi_i, \phi_j) + \sum_{i=0}^{N-1} u_{i+1/2} a(\phi_{i+1/2}, \phi_j) = L(\phi_j),$$

pour tout  $j = 1, \dots, N - 1$ .

et

$$\sum_{i=1}^{N-1} u_i a(\phi_i, \phi_{j+1/2}) + \sum_{i=0}^{N-1} u_{i+1/2} a(\phi_{i+1/2}, \phi_{j+1/2}) = L(\phi_{j+1/2}),$$

pour tout  $j = 0, \dots, N - 1$ .

(5.17)

Notons qu'ici, l'interpolé de Lagrange d'une fonction  $u \in H_0^1(]0, 1[)$  est donné par

$$\pi_{h,2}(u)(x) = \sum_{i=1}^{N-1} u(x_i) \phi_i(x) + \sum_{i=0}^{N-1} u(x_{i+1/2}) \phi_{i+1/2}(x).$$

Nous verrons dans le paragraphe 5.3.5 les résultats d'estimation d'erreur pour cette méthode.

### 5.3.3 Élément finis de référence

Le calcul des fonctions de forme est simple en une dimension d'espace mais en dimensions supérieures ce calcul est plus complexe. Pour cette raison, ainsi que pour d'autres que nous développerons plus tard, il est commode d'utiliser un élément fini de référence. Nous allons voir le principe en une dimension d'espace.

Pour les éléments finis d'ordre 1 l'élément de référence est  $([0, 1], \mathbb{R}^1[X], \{0, 1\})$ . Notons, tout d'abord, que tout intervalle  $[x_i, x_{i+1}]$  est bijectif à  $[0, 1]$ . En effet, introduisons

$$\begin{aligned} T_i : [x_i, x_{i+1}] &\rightarrow [0, 1] \\ x &\mapsto (x - x_i)/\Delta x \end{aligned}$$

Cette application est affine et donc bijective, elle est composée d'une homothétie et d'une translation. On calcule les fonctions de forme sur l'élément fini de référence, c'est à dire  $p_0$  et  $p_1$  de  $\mathbb{R}^1[X]$  telles que  $p_0(0) = 1, p_0(1) = 0, p_1(0) = 0, p_1(1) = 1$ . On a  $p_0(y) = 1 - y$  et  $p_1(y) = y$  pour tout  $y \in [0, 1]$ .

En utilisant  $T_i$  il vient  $\phi_i(x) = p_0(T_i(x))$  pour  $x \in [x_i, x_{i+1}]$  et  $\phi_i(x) = p_0(T_{i-1}(x))$  pour  $x \in [x_{i-1}, x_i]$  et bien sûr  $\phi_i(x) = 0$  sinon.

Nous verrons qu'en dimension supérieure l'introduction d'un élément fini de référence simplifie notablement les calculs. De plus, il permet de générer l'ensemble des éléments finis du maillage à partir d'un seul élément.

### 5.3.4 Conformité avec d'autres espaces

Le choix de la base éléments finis dépend du problème considéré. En effet, dans l'exemple simple précédent, la solution exacte ainsi que les fonctions test dans la formulation variationnelle sont dans  $H_0^1(]0, 1[)$ . Ainsi, l'espace d'approximation est  $H_0^1(]0, 1[)$  conforme.

Si, maintenant on considère la même équation mais avec des conditions aux limites de type Neumann, il est nécessaire de choisir un espace d'approximation  $H^1(]0, 1[)$  conforme.

Pour cela, on introduit

$$V_h = \left\{ v \in C([0, 1]) ; v|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{R}^1[X] \text{ pour tout } i = 0, \dots, N - 1 \right\}.$$

Nous verrons en travaux dirigés que cet espace est bien  $H^1(]0, 1[)$  conforme, qu'il est de dimension  $N + 1$  et que la base de cet espace est donnée par  $(\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{N-1}, \phi_N)$  où les  $\phi_i$  pour  $i = 1, \dots, N - 1$  sont donnés par (5.10). Les deux fonctions  $\phi_0$  et  $\phi_N$  sont les fonctions représentées sur la figure suivante.

On peut discrétiser bien d'autres exemples, notamment, on peut montrer que pour construire un espace d'approximation  $H^2(]0, 1[)$  conforme, il est nécessaire d'introduire des éléments finis dits de Hermite fixant la dérivée aux noeuds du maillages. C'est à dire l'espace d'approximation suivant

$$V_h = \left\{ v \in C^1([0, 1]) ; v|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{R}^3[X] \text{ pour tout } i = 0, \dots, N - 1 \right\}.$$

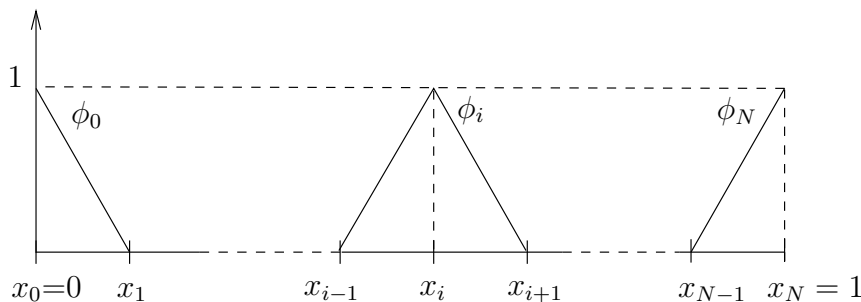


Figure 5.6: Fonctions de base éléments finis de degré 1,  $H^1([0, 1])$  conforme.

Sur un élément de référence  $[0, 1]$ , il y a quatre fonctions de base  $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$  vérifiant

$$\begin{aligned} \phi_1(0) &= 1, & \phi_1(1) &= \phi_1'(0) = \phi_1'(1) = 0, \\ \phi_2(1) &= 1, & \phi_2(0) &= \phi_2'(0) = \phi_2'(1) = 0, \\ \phi_3'(0) &= 1, & \phi_3(0) &= \phi_3(1) = \phi_3'(1) = 0, \\ \phi_4'(1) &= 1, & \phi_4(0) &= \phi_4(1) = \phi_4'(0) = 0. \end{aligned}$$

Remarquons que cet espace n'est pas le même que l'espace des éléments finis de Lagrange de degré 3 qui est  $H^1([0, 1])$  conforme et donné par

$$V_h^3 = \left\{ v \in C[0, 1] ; v|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{R}^3[X], \quad \forall i = 0, \dots, N-1 \right\}.$$

Pour cet espace, sur un élément de référence  $[0, 1]$ , il y a quatre fonctions de base  $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$  vérifiant

$$\begin{aligned} \phi_1(0) &= 1, & \phi_1(1) &= \phi_1(1/3) = \phi_1(2/3) = 0, \\ \phi_2(1) &= 0, & \phi_2(0) &= \phi_2(1/3) = \phi_2(2/3) = 0, \\ \phi_3(1/3) &= 1, & \phi_3(0) &= \phi_3(1) = \phi_3(2/3) = 0, \\ \phi_4(2/3) &= 1, & \phi_4(0) &= \phi_4(1) = \phi_4(1/3) = 0. \end{aligned}$$

### 5.3.5 Éléments finis de Lagrange de degré $k$ , résultats de convergence

Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ , on introduit l'espace

$$V_h^k = \left\{ v \in C[0, 1] ; v(0) = v(1) = 0 \text{ et } v|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{R}^k[X], \quad \forall i = 0, \dots, N-1 \right\}. \quad (5.18)$$

Pour tout  $i = 0, \dots, N-1$ , et tout  $l = 1, \dots, k-1$ , on définit les points

$$x_{i,l} = x_i + \frac{l}{k} \Delta x,$$

où on rappelle que  $\Delta x = 1/N$  est le pas d'espace.

On a alors le résultat suivant

#### Proposition 5

Pour tout  $i = 0, \dots, N-1$ , le triplet  $([x_i, x_{i+1}], \mathbb{R}^k[X], \{x_i, x_{i,1}, \dots, x_{i,k-1}, x_{i+1}\})$  est un élément fini de Lagrange.

De plus l'espace  $V_h^k$  est  $H_0^1(]0, 1[)$  conforme. Sa dimension est  $kN - 1$  et la base éléments finis est donnée par  $(\phi_i)_{i=1, \dots, N-1} \cup (\phi_{r,l})_{r=0, \dots, N-1, l=1, \dots, k-1}$  où les fonctions de forme sont telles que

$$\phi_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad \phi_i(x_{r,l}) = 0,$$

et

$$\phi_{r,l}(x_j) = 0, \quad \phi_{r,l}(x_{r',l'}) = \delta_{rr'} \delta_{ll'},$$

pour tout  $i, j = 1, \dots, N-1$ ,  $r, r' = 0, \dots, N-1$  et  $l, l' = 1, \dots, k-1$ .

**Preuve :** Elle est identique à celle donnée dans les cas  $k = 1$  ou  $k = 2$ .

On rappelle qu'on cherche une approximation du problème variationnel

$$\text{Trouver } u \in H_0^1(]0, 1[) \text{ tel que } a(u, v) = L(v) \text{ pour tout } v \in H_0^1(]0, 1[), \quad (5.19)$$

où

$$a(u, v) = \int_0^1 u'(x) v'(x) dx \quad \text{et} \quad L(v) = \int_0^1 f(x) v(x) dx.$$

Comme précédemment, on approche la solution exacte  $u$  par

$$u_h = \sum_{i=1}^{N-1} u_i \phi_i + \sum_{r=0}^{N-1} \sum_{l=1}^{k-1} u_{r,l} \phi_{r,l} \in V_h^k. \quad (5.20)$$

Et le problème approché  $(FV)_h$  est donné par

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } (u_1, \dots, u_{N-1}) \in \mathbb{R}^{N-1} \text{ et } (u_{r,l})_{r=0, \dots, N-1, l=1, \dots, k-1} \in \mathbb{R}^{N(k-1)} \text{ tels que} \\ &\sum_{i=1}^{N-1} u_i a(\phi_i, v_h) + \sum_{r=0}^{N-1} \sum_{l=1}^{k-1} u_{r,l} a(\phi_{r,l}, v_h) = L(v_h) \text{ pour tout } v_h \in V_h^k, \end{aligned}$$

soit encore, puisque  $(\phi_i)_{i=1, \dots, N-1} \cup (\phi_{r,l})_{r=0, \dots, N-1, l=1, \dots, k-1}$  est une base

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } (u_1, \dots, u_{N-1}) \in \mathbb{R}^{N-1} \text{ et } (u_{r,l})_{r=0, \dots, N-1, l=1, \dots, k-1} \in \mathbb{R}^{N(k-1)} \text{ tels que} \\ &\sum_{i=1}^{N-1} u_i a(\phi_i, \phi_j) + \sum_{r=0}^{N-1} \sum_{l=1}^{k-1} u_{r,l} a(\phi_{r,l}, \phi_j) = L(\phi_j), \text{ pour tout } j = 1, \dots, N-1, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{N-1} u_i a(\phi_i, \phi_{r',l'}) + \sum_{r=0}^{N-1} \sum_{l=1}^{k-1} u_{r,l} a(\phi_{r,l}, \phi_{r',l'}) = L(\phi_{r',l'}), \\ &\text{pour tout } r' = 0, \dots, N-1 \text{ et tout } l' = 1, \dots, k-1. \end{aligned} \quad (5.21)$$

On montre alors le résultat suivant

**Théorème 20** *Si  $u$  est la solution de (5.19) et  $u_h$  donnée par (5.20) (5.21), alors il existe  $C$ , ne dépendant pas de  $h$ , telle que*

$$\|u - u_h\|_{H^1(]0,1])} \leq C h \|f\|_{L^2(]0,1])}.$$

*Cette méthode est d'ordre au moins  $k$ , c'est à dire qu'il existe une constante  $C$ , indépendante de  $h$ , telle que, si la solution exacte  $u$  est dans  $H^{k+1}(]0, 1[)$  alors*

$$\|u - u_h\|_{H^1(]0,1])} \leq C h^k \|u\|_{H^{k+1}(]0,1])}.$$

**Preuve :** La démonstration de ce résultat est admise, le principe est le même que pour les éléments finis de degré 1, les estimations sur la fonction d'interpolation de Lagrange sont seulement un peu plus techniques à obtenir.

## 5.4 Éléments finis de Lagrange en dimension deux ou trois

Le problème modèle en dimension 2 ou 3 est l'équation de Poisson avec conditions aux limites de Dirichlet homogène. On se donne  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ( $n = 2$  ou  $3$ ) un ouvert borné. On note  $\partial\Omega$  sa frontière et  $\nu$  la normale unitaire à  $\partial\Omega$  extérieure à  $\Omega$ . Le problème modèle est donné par

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x), & \text{dans } \Omega, \\ u(x) = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

On rappelle que la formulation variationnelle de ce problème est

$$(FV) \quad \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que } a(u, v) = L(v) \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega),$$

où

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) \, dx, \quad L(v) = \int_{\Omega} f(x) v(x) \, dx.$$

On suppose dans ce paragraphe que  $\Omega$  est polyédrique. On commence par définir le maillage, c'est à dire l'ensemble des mailles de la discrétisation. Nous verrons deux types de maillages, des maillages triangulaires ( $n = 2$ ) ou tétraédrique ( $n = 3$ ) et des maillages rectangulaires ( $n = 2$ ) ou parallélépipédique ( $n = 3$ ), bien sûr il est possible d'avoir des maillages mixtes ou plus complexes.

**Définition 11** *On appelle triangulation  $\mathcal{T}_h$  de  $\Omega$ , un recouvrement de ce domaine par des triangles ou des rectangles si  $n = 2$  et des tétraèdres ou des parallélépipèdes si  $n = 3$ . Ces éléments seront appelés des mailles. On suppose que l'intersection de deux mailles est soit vide, soit réduite à un sommet ou une arête commune si  $n = 2$ , et si  $n = 3$  soit vide, soit réduite à un sommet, à une arête ou à une face.*

*Le réel  $h$  donne la taille du maillage, il est donné par*

$$h = \max_{T \in \mathcal{T}_h} h_T,$$

où pour toute maille  $T$  de  $\mathcal{T}_h$ ,  $h_T$  est le diamètre de  $T$  défini par

$$h_T = \max_{x, y \in T} \|x - y\|_2, \tag{5.22}$$

où  $\|\cdot\|_2$  est la norme Euclidienne de  $\mathbb{R}^n$ .

Enfin, on appelle rondeur d'une maille  $T$  et on la note  $\rho_T$ , le diamètre maximum des boules contenues dans  $T$

$$\rho_T = 2 \sup_{\substack{r \in \mathbb{R}, x \in T \\ B_2(x, r) \subset T}} r,$$

où  $B_2(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n ; \|y - x\|_2 < r\}$ .



### 5.4.1 Eléments finis $P_k$

#### 5.4.1.1 Présentation

Dans ce paragraphe, on suppose que le maillage n'est constitué que de triangles si  $n = 2$  ou que de tétraèdres si  $n = 3$ . On définit alors l'ensemble des polynômes de  $n$  variables et de degré  $k$  comme suit

$$P_k = \left\{ p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} ; \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto p(t, \dots, t) \end{array} \in \mathbb{R}^k[X] \right\}.$$

On peut montrer que la dimension de  $P_k$  est donnée par  $\dim P_k = (n + k)! / (n! k!)$ . En dimension 2, on a donc,  $\dim P_1 = 3$ ,  $\dim P_2 = 6$ ,  $\dim P_3 = 10$ ...

Comme en dimension 1, on introduit alors l'espace d'approximation

$$V_{h,P_k} = \left\{ v \in C^0(\bar{\Omega}) ; v|_{\partial\Omega} = 0 \text{ et } v|_T \in P_k, \forall T \in \mathcal{T}_h \right\}.$$

Il est facile de montrer que cet espace est  $H_0^1(\Omega)$  conforme. Il reste à déterminer une base de cet espace afin "d'assembler la matrice", c'est à dire de calculer ses coefficients.

Pour cela, nous allons utiliser, comme en dimension 1 des fonctions de forme associées aux noeuds de la triangulation. A ce stade, les seuls points introduits sont les sommets des mailles. Il va nous falloir choisir des noeuds, c'est à dire des points où l'on va calculer les fonctions de forme. Il est alors nécessaire en général d'introduire (en tout cas pour  $k \geq 2$ ) des points supplémentaires. Mais, contrairement à la dimension 1 ces points ne doivent pas être choisis n'importe où dans la maille, ceci pour que les fonctions de forme respectent la continuité des fonctions de  $V_{h,P_k}$  sur les interfaces du maillage.

#### 5.4.1.2 Comment choisir les noeuds du maillage

Tout d'abord, dans chaque maille, on doit avoir autant de noeuds que la dimension de  $P_k$ , ceci afin de déterminer complètement les fonctions de forme. C'est la propriété d'unisolvance de l'élément fini que l'on retrouve. On a donc l'hypothèse ( $H_0$ ) ci dessous

$$(H_0) \left\{ \begin{array}{l} \text{Dans chaque maille } T \text{ le nombre de noeuds doit être donné par } \dim P_k \\ \text{soit } (n + k)! / (n! k!). \end{array} \right.$$

Les noeuds doivent satisfaire l'hypothèse ( $H_1$ ) ci-dessous :

$$(H_1) \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour deux mailles voisines, les noeuds introduits sur l'interface commune} \\ \text{pour une des mailles doivent faire partie des noeuds pour la maille voisine.} \end{array} \right.$$

Nous allons essayer de comprendre la dernière condition sur un exemple, celui des éléments finis de degré 1. Précisons tout d'abord que

$$P_1 = \left\{ p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} ; p(x, y) = ax + by + c, \text{ avec } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ donnés} \right\}.$$

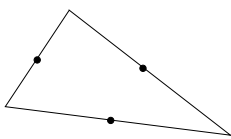


Figure 5.7: Mauvais choix de noeuds pour les éléments finis P1 en dimension 2.

Pour déterminer les trois constantes sur chaque triangle, il est alors nécessaire de choisir trois points non alignés. Choisissons tout d'abord les milieux des côtés du triangle, nous symboliserons ce choix par le dessin de la Figure 5.7.

Nous allons voir sur un exemple simple que ce choix est mauvais car les fonctions de forme associées à ces noeuds ne seront pas continues d'un triangle à l'autre.

On considère deux triangles voisins  $T_1$  et  $T_2$  dont les sommets sont respectivement  $(s_1, s_2, s_3) = ((0, 0), (2, 0), (0, 2))$  et  $(s_2, s_3, s_4) = ((2, 0), (0, 2), (2, 2))$ . Les noeuds de ces triangles sont les milieux des côtés donnés par  $c_{12} = (1, 0)$ ,  $c_{13} = (0, 1)$ ,  $c_{23} = (1, 1)$ ,  $c_{34} = (1, 2)$ ,  $c_{24} = (2, 1)$ .

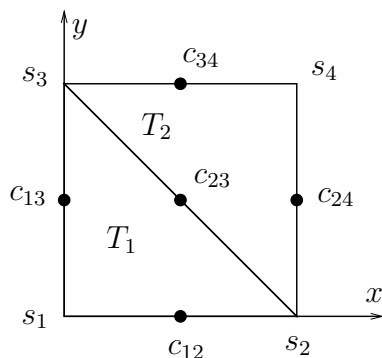


Figure 5.8: Mauvais choix de noeuds pour les éléments finis P1 en dimension 2, exemple.

La fonction de forme associée au noeud  $c_{13}$  et notée  $\phi_{13}$ , satisfait  $\phi_{13}|_{T_1} \in P1$ ,  $\phi_{13}|_{T_2} \in P1$  et  $\phi_{13}(c_{ij}) = \delta_{i1} \delta_{j3}$  pour tout  $(i, j) \in \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$ . Un rapide calcul permet de montrer que

$$\phi_{13}|_{T_1}(x, y) = -x + 1, \text{ si } (x, y) \in T_1, \quad \phi_{13}|_{T_2}(x, y) = 0, \text{ si } (x, y) \in T_2.$$

Or, pour que cette fonction soit dans  $V_{h,P1}$ , elle doit être continue dans le domaine et donc, en particulier sur le bord des triangles. Puisque cette fonction vaut 0 dans  $T_2$  pour assurer la continuité sur le segment  $[s_2, s_3]$ , il faudrait avoir  $\phi_{13}|_{T_1}(x, y) = 0$  pour tout  $(x, y) \in [s_2, s_3]$ , soit encore  $x = 1$  pour tout  $(x, y) \in [s_2, s_3]$  ce qui est clairement faux.

On peut montrer que pour assurer la continuité des fonctions de forme, les noeuds de la triangulation doivent être choisis de sorte que l'hypothèse suivante soit vérifiée

(H2)  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Sur chaque interface de la triangulation, il doit y avoir suffisamment de} \\ \text{noeuds pour déterminer complètement une fonction de } P_k \text{ de} \\ \text{dimension } n - 1. \end{array} \right.$

Ainsi, pour l'exemple précédent  $P1$  en dimension 2, on doit pouvoir déterminer un polynôme de degré 1 d'une variable, on a donc 2 constantes à déterminer, il faut donc deux points sur chaque interface. Il faut de plus, d'après  $(H_0)$ , 3 noeuds par triangle. Classiquement, on choisit les sommets de la triangulation. Ce bon choix d'élément fini est symbolisé de la manière suivante

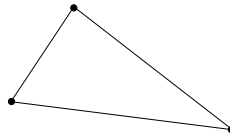


Figure 5.9: Eléments finis P1 en dimension 2.

Pour du  $P2$ , l'hypothèse  $(H_0)$  impose 6 noeuds par triangle. De plus d'après  $(H_2)$ , sur chaque côté, on doit déterminer un polynôme de degré 2 donc 3 constantes et donc mettre 3 noeuds sur chaque interface. Classiquement on choisit les sommets de la triangulation et le milieu de chaque interface (on pourrait choisir n'importe quel point de l'interface en dehors des sommets). Cet élément fini est symbolisé par le dessin ci-dessous.

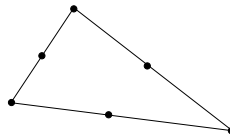


Figure 5.10: Eléments finis P2 en dimension 2.

Pour du  $P3$ , l'hypothèse  $(H_0)$  impose 10 noeuds par triangle. De plus d'après  $(H_2)$ , sur chaque côté, on doit avoir 4 noeuds sur chaque interface, on les choisit équidistribués sur l'interface. On rajoute le centre de gravité du triangle pour le dixième point. Cet élément fini est symbolisé par le dessin suivant.

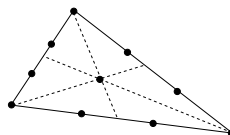


Figure 5.11: Eléments finis P3 en dimension 2.

Tous ces résultats se généralisent en dimension 3. On termine avec deux exemples en dimension 3 pour du  $P1$  et du  $P2$ . Pour du  $P1$ , l'hypothèse  $(H_0)$  impose 4 noeuds

par tétraèdre. De plus d'après  $(H_2)$ , on doit déterminer complètement sur chaque interface un polynôme de degré 1 en deux variables, soit 3 constantes, on choisit les sommets. Pour du  $P2$ , on doit avoir 10 noeuds par tétraèdre et on doit pouvoir déterminer un polynôme de degré 2 de deux variables  $p(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f$  soit 6 constantes, donc 6 noeuds par interface. On choisit les sommets et les milieux des arêtes des tétraèdres. Ces éléments finis sont symbolisés par les dessins suivants.

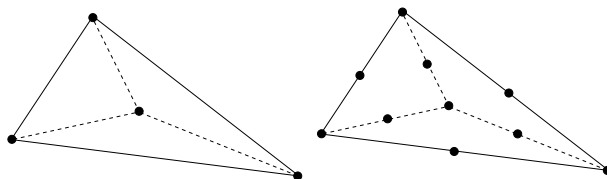


Figure 5.12: Eléments finis  $P1$  et  $P2$  en dimension 3.

On a alors le résultat suivant

**Théorème 21** Soit  $\mathcal{T}_h$  une triangulation de  $\Omega$  satisfaisant les propriétés de la définition 11 et qui n'est composée que de triangles si  $n = 2$  ou que de tétraèdres si  $n = 3$ .

On se donne un ensemble  $\mathcal{N}_h = \{c_i ; i = 1, \dots, N_h\}$  de noeuds du maillage satisfaisant les hypothèses  $(H_0)$ ,  $(H_1)$  et  $(H_2)$  (données pages 55 et 56).

Alors l'ensemble des fonctions de forme associées aux noeuds de  $\mathcal{N}_h$ , c'est à dire les fonctions  $\phi_i$  pour  $i = 1, \dots, N_h$  définies par

$$\begin{cases} \phi_i|_T \in P_k, & \forall T \in \mathcal{T}_h, \\ \phi_i(c_j) = \delta_{ij}, & \forall j = 1, \dots, N_h, \end{cases}$$

définissent une base de  $V_{h,P_k}$ , et toute fonction  $v_h \in V_{h,P_k}$  s'écrit

$$v_h = \sum_{i=1}^{N_h} v_i \phi_i.$$

#### 5.4.1.3 Calcul des fonctions de forme à l'aide d'un triangle de référence

Nous allons voir comment déterminer les fonctions de forme à l'aide d'un triangle de référence. Commençons par remarquer que pour un noeud donné  $c$ , le support de la fonction de forme associée à ce noeud,  $\phi_c$ , est exactement la réunion des mailles de la triangulation contenant le noeud  $c$ .

Ainsi pour reprendre les éléments finis  $P1$ , la fonction de forme est représentée sur la figure 5.13.

On voit donc, qu'il est nécessaire de déterminer le polynôme constituant  $\phi_c$  sur chaque triangle le contenant. Pour cela, on utilise un triangle de référence sur lequel on effectue tous les calculs. Puis à l'aide d'un changement de variables, on se ramène sur n'importe quel triangle de  $\mathcal{T}_h$ . Pour cela, on utilise le lemme suivant

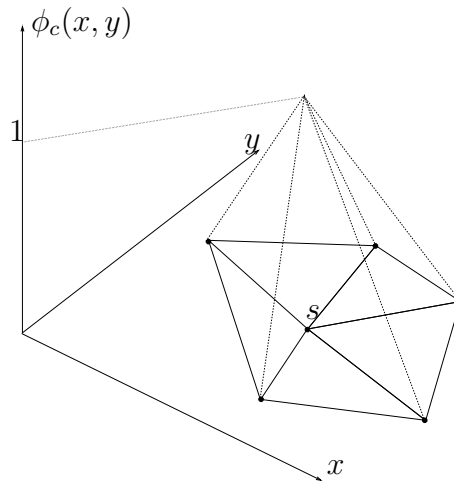


Figure 5.13: Fonction de forme associée au noeud  $c$  pour les éléments finis  $P_1$  en dimension 2.

**Lemme 5** Soit  $n = 2$  ou  $3$ , on considère  $(T_r, P_k, \{c_1, \dots, c_J\})$  avec  $J = (n+k)!/(n! k!)$ , un élément fini de Lagrange. Soit de plus  $T$  un élément de  $\mathcal{T}_h$ , et  $F$  une application bijective de  $T_r$  dans  $T$ , alors  $(T, P_k, \{F(c_1), \dots, F(c_J)\})$  est un élément fini de Lagrange.

De plus si pour tout  $i = 1, \dots, J$ ,  $\phi_{i,r}$  est la fonction de forme sur  $T_r$  associée au noeud  $c_i$ , c'est à dire la fonction satisfaisant  $\phi_{i,r} \in P_k$  et  $\phi_{i,r}(c_j) = \delta_{ij}$  alors  $\phi_{i,r} \circ F^{-1}$  est une fonction de forme sur  $T$  associée au noeud  $F(c_i)$ .

Je détaille cette procédure en dimension 2 dans le cas des éléments finis  $P_1$ . On considère donc le triangle  $T_r$  de sommets  $s_1 = (0, 0)$ ,  $s_2 = (1, 0)$  et  $s_3 = (0, 1)$ , ce triangle est appelé triangle de référence.

Déterminons les fonctions de forme sur ce triangle de référence. Pour cela, nous avons besoin des coordonnées barycentriques dont je rappelle la définition

**Définition 12** Soit un triangle  $T$  de sommets  $s_1, s_2$ , et  $s_3$ . On suppose que  $T$  est non dégénéré c'est à dire que  $s_1, s_2$  et  $s_3$  sont non alignés.

Alors pour tout point dans  $T$  de coordonnées cartésiennes  $(x, y)$ , les coordonnées barycentriques de  $(x, y)$  sont les réels  $\lambda_1, \lambda_2$  et  $\lambda_3$  définies par

$$\begin{aligned} \lambda_1(x, y) s_1 + \lambda_2(x, y) s_2 + \lambda_3(x, y) s_3 &= (x, y), \\ \lambda_1(x, y) + \lambda_2(x, y) + \lambda_3(x, y) &= 1. \end{aligned}$$

Pour tout  $(x, y) \in T$  ce système admet une unique solution. De plus, pour tout  $i = 1, 2, 3$ , les fonctions  $\lambda_i$  sont affines.

On montre le résultat suivant

**Lemme 6** Soit le triangle  $T_r$  de sommets  $s_1 = (0, 0)$ ,  $s_2 = (1, 0)$  et  $s_3 = (0, 1)$ , alors le triplet  $(T_r, P_1, \{s_1, s_2, s_3\})$  est un élément fini de Lagrange et les fonctions de forme

$(\phi_{1,r}, \phi_{2,r}, \phi_{3,r})$  sont données par les fonctions coordonnées barycentriques  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  suivantes

$$\begin{aligned}\phi_{1,r}(x, y) &= 1 - x - y = \lambda_1(x, y), \\ \phi_{2,r}(x, y) &= x = \lambda_2(x, y), \\ \phi_{3,r}(x, y) &= y = \lambda_3(x, y),\end{aligned}\tag{5.23}$$

pour tout point  $(x, y) \in T_r$ .

**Preuve :** Il suffit de montrer que  $\{s_1, s_2, s_3\}$  est  $P_1$  unisolvant, c'est à dire que pour tout  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ , il existe une unique fonction  $p \in P_1$  telle que  $p(s_i) = \alpha_i$  pour tout  $i = 1, 2$  ou  $3$ .

On cherche donc  $a, b$  et  $c$  dans  $\mathbb{R}$  tels que

$$\begin{cases} c = \alpha_1, \\ a + c = \alpha_2, \\ b + c = \alpha_3, \end{cases}$$

qui admet une unique solution donnée par  $a = \alpha_2 - \alpha_1$ ,  $b = \alpha_3 - \alpha_1$  et  $c = \alpha_1$ . Et,

$$p(x, y) = (\alpha_2 - \alpha_1)x + (\alpha_3 - \alpha_1)y + \alpha_1.$$

Donc,  $(T_r, P_1, \{s_1, s_2, s_3\})$  est un élément fini de Lagrange.

Pour déterminer la base, il suffit de choisir pour  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  tour à tour les valeurs  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  et  $(0, 0, 1)$ , ce qui donne (5.23).

Enfin pour terminer, donnons la fonction  $F$  qui envoie le triangle  $T_r$  sur un triangle  $T$  de sommets  $(s_1 = (x_1, y_1), s_2 = (x_2, y_2), s_3 = (x_3, y_3))$ , on fixe  $F$  telle que  $F(0, 0) = s_1$ ,  $F(1, 0) = s_2$  et  $F(0, 1) = s_3$  alors

$$\begin{aligned}F : T_r &\rightarrow T \\ (s, t) &\mapsto (x, y) = F(s, t) = \begin{pmatrix} (x_2 - x_1)s + (x_3 - x_1)t + x_1 \\ (y_2 - y_1)s + (y_3 - y_1)t + y_1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

#### 5.4.1.4 Assemblage de la matrice.

Tout d'abord, on donne le problème approché  $(FV)_h$ . On utilise les notations du Théorème 21. La solution exacte  $u \in H_0^1(\Omega)$  est approchée par  $u_h \in V_{h,P_1}$ , qui se décompose dans la base des  $(\phi_i)_{i=1, \dots, N_h}$ . Le problème  $(FV)_h$  est alors donné par

$$\begin{aligned}(FV)_h \quad \text{Trouver } (u_1, \dots, u_{N_h}) \in \mathbb{R}^{N_h} \text{ tel que} \\ \sum_{j=1}^{N_h} u_j \int_{\Omega} \nabla \phi_j(x) \cdot \nabla \phi_i(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \phi_i(x) dx \\ \text{pour tout } i = 1, \dots, N_h.\end{aligned}$$

Ce problème est équivalent à un système linéaire

$$A_h U_h = F_h,$$

où  $A_h = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq N_h}$  et

$$a_{i,j} = \int_{\Omega} \nabla \phi_j(x) \cdot \nabla \phi_i(x) dx,$$

$U_h = (u_1, \dots, u_{N_h})^T$  et  $F_h = (F_1, \dots, F_{N_h})^T$  avec

$$F_i = \int_{\Omega} f(x) \phi_i(x) dx.$$

Remarquons que

$$a_{i,j} = \int_{\Omega} \nabla \phi_j(x) \cdot \nabla \phi_i(x) dx = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla \phi_j(x) \cdot \nabla \phi_i(x) dx = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} a_{i,j,T}.$$

Ainsi, il semblerait que pour calculer les coefficients de la matrice  $A_h$ , il soit nécessaire d'effectuer trois boucles : une sur  $i$ , une sur  $j$  et une sur les triangles de  $\mathcal{T}_h$ .

Mais la quantité  $a_{i,j,T}$  est non nulle, si et seulement si  $i$  ET  $j$  sont des noeuds de  $T$ . Avec cette remarque, on va pouvoir construire un algorithme avec une seule boucle, classiquement c'est celle sur les triangles que l'on conserve.

En effet, pour chaque triangle  $T$ , on introduit des matrices et vecteurs sources élémentaires définies comme suit. Chaque triangle  $T$ , contient 3 noeuds numérotés de 1 à 3. On note  $\phi_1^T, \phi_2^T$  et  $\phi_3^T$  la restriction à  $T$  des fonctions de forme associées aux noeuds de  $T$ . On calcul pour chaque noeud de  $T$

$$A_T = (a_{kl}^T)_{1 \leq k, l \leq 3}, \quad F_T = (F_k^T)_{1 \leq k \leq 3}$$

avec

$$a_{kl}^T = \int_T \nabla \phi_l^T(x) \cdot \nabla \phi_k^T(x) dx, \quad F_k^T = \int_T f(x) \phi_k^T(x) dx.$$

L'algorithme de l'assemblage de la matrice et du terme source est alors donné par

```

Pour p = 1 jusqu'à card(T_h) faire
  Pour k = 1 jusqu'à 3 faire
    Si c_k n'est pas sur le bord faire
      - Calculer F_k^T
      - Rajouter F_k^T au coefficient de la ligne i_k de Fh, où i_k correspond
        au numéro de k dans la numérotation globale des noeuds.
      - Pour l = 1 jusqu'à 3 faire
        Si c_l n'est pas sur le bord faire
          - Calculer a_{kl}^T
          - Rajouter a_{kl}^T au coefficient de la ligne de i_k et de la
            colonne i_l de Ah, où i_k et i_l correspondent respectivement
            aux numéros de k et de l dans la numérotation globale
            des noeuds.
        Fin Si.
      Fin Pour
    Fin Si
  Fin Pour
Fin Pour
    
```

On peut le détailler, en introduisant les variables suivantes :

**noeuds** : tableau de taille  $2 \times N_h$  contenant les coordonnées de chaque noeud du maillage. Ce tableau permet également de numéroter les noeuds, il faut le faire de sorte que la largeur de bande de la matrice soit la plus petite possible.

**noeuds-bord** : tableau de taille  $2 \times N_h$  contenant 0 si le noeud est sur le bord et 1 sinon.

**noeuds-triangles** : tableau de taille  $\text{card}(\mathcal{T}_h) \times 3$  contenant pour chaque triangle  $T$  de  $\mathcal{T}_h$  les indices dans le tableau noeuds des 3 noeuds du triangles  $T$ .

**AT** : matrice élémentaire de taille  $3 \times 3$ .

**FT** : Vecteur source élémentaire de taille 3.

**Ah** : matrice de taille  $N_h \times N_h$ .

**Fh** : Vecteur source de taille  $N_h$ .

Fh=0

Ah=0

Pour  $p = 1$  jusqu'à  $\text{card}(\mathcal{T}_h)$  faire

    FT=0

    AT=0

    Pour  $k = 1$  jusqu'à 3 faire

        Si noeuds-bord(noeuds-triangles(k,p))= 1 faire

            - Calculer FT(k)

            - Fh(noeuds-triangles(k,p))=Fh(noeuds-triangles(k,p))+FT(k)

            - Pour  $l = 1$  jusqu'à 3 faire

                Si noeuds-bord(noeuds-triangles(l,p))= 1

                    - Calculer AT(k,l)

                    - Ah(noeuds-triangles(k,p),noeuds-triangles(l,p))=

                        Ah(noeuds-triangles(k,p),noeuds-triangles(l,p))+AT(k,l)

                Fin Si.

            Fin Pour

        Fin Si

    Fin Pour

Fin Pour

Les calculs de FT(k) et de AT(k,l) se fait à l'aide du triangle de référence, nous détaillerons cela en travaux dirigés.

### 5.4.2 Eléments finis Qk

On suppose, maintenant, que le maillage n'est constitué que de rectangles si  $n = 2$  ou que de parallépipèdes si  $n = 3$ . On définit alors l'ensemble des polynômes de  $n$



variables et de degré  $k$  en chaque variable comme suit

$$Q_k = \left\{ p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} ; \forall i = 1, \dots, n, \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \begin{array}{l} \in \mathbb{R}^k[X], \\ x_i \mapsto p(x_1, \dots, x_n) \end{array} \right. \\ \left. \forall x_j \in \mathbb{R}, j \neq i \right\}.$$

On peut montrer que la dimension de  $Q_k$  est donnée par  $\dim Q_k = (k + 1)^n$ . A titre d'exemple, on pourra remarquer que

$$Q_1 = \left\{ p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} ; p(x, y) = ax + by + cxy + d, \text{ avec } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ donnés} \right\},$$

$$Q_2 = \left\{ p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} ; p(x, y) = ax^2 + by^2 + cx^2y^2 + dxy^2 + ex^2y + fx + gy + ixy + j, \right. \\ \left. \text{avec } a, b, c, d, e, e, f, g, i, j \in \mathbb{R} \text{ donnés} \right\},$$

Comme précédemment, on introduit alors l'espace d'approximation

$$V_{h,Q_k} = \left\{ v \in C^0(\bar{\Omega}) ; v|_{\partial\Omega} = 0 \text{ et } v|_T \in Q_k, \forall T \in \mathcal{T}_h \right\}.$$

Il est facile de montrer que cet espace est  $H_0^1(\Omega)$  conforme. Comme pour les éléments finis  $P_k$ , on utilise les fonctions de forme associés aux noeuds de la triangulation et ces noeuds doivent satisfaire les hypothèses  $(H_0)$ ,  $(H_1)$  et  $(H_2)$  où l'hypothèse  $(H_1)$  est inchangée et où  $(H_0)$ , et  $(H_2)$  sont maintenant données par

- $(H_0)$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{Dans chaque maille } T \text{ le nombre de noeuds doit être donné par } \dim Q_k \\ \text{soit } (k + 1)^n. \end{array} \right.$
- $(H_2)$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{Sur chaque interface de la triangulation, il doit y avoir suffisamment de} \\ \text{noeuds pour déterminer complètement une fonction de } Q_k \text{ de} \\ \text{dimension } n - 1. \end{array} \right.$

Il est facile de montrer qu'en dimension 2, le bon choix d'éléments finis  $Q_1$ ,  $Q_2$  et  $Q_3$  sont symbolisés par les dessins ci-dessous

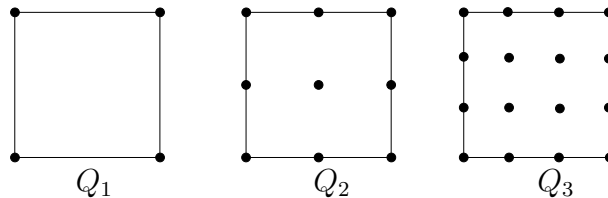
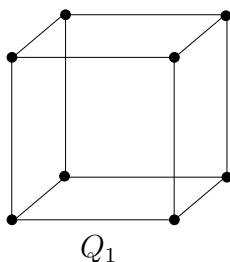


Figure 5.14: Eléments finis  $Q_1$ ,  $Q_2$  et  $Q_3$  en dimension 2.

Alors, qu'en dimension 3, le bon choix d'éléments finis  $Q_1$  est symbolisé par le dessin ci-dessous

Figure 5.15: Eléments finis  $Q_1$  en dimension 3.

### 5.4.3 Résultats de convergence et d'estimations d'erreurs dans le cadre général

Nous ne ferons qu'énoncer le résultat de convergence et d'estimations d'erreur, les techniques utilisées dans la preuve, sont les mêmes qu'en dimension une, mais beaucoup plus complexes en terme de notations. On majore l'erreur entre la solution exacte et la solution approchée par l'erreur entre la solution exacte et l'interpolé de Lagrange de cette solution.

Le résultat s'énonce comme suit

**Théorème 22** *Soit  $\Omega$ , un ouvert borné polyédrique de  $\mathbb{R}^n$  ( $n = 2$  ou  $3$ ), on considère la solution du problème variationnel (FV) donné page 54.*

*Soit  $\mathcal{T}_h$  une triangulation de  $\Omega$  satisfaisant les propriétés de la définition 11 et qui n'est composée que de triangles ou de rectangles si  $n = 2$  ou que de tétraèdres ou de parallélépipèdes si  $n = 3$ . On suppose de plus qu'il existe  $\alpha > 0$  telle que*

$$\frac{h_K}{\rho_K} \leq \alpha,$$

*pour tout  $K \in \mathcal{T}_h$  et où  $h_K$  et  $\rho_K$  sont donnés dans la définition 11.*

*On considère une approximation  $P_k$  ou  $Q_k$  avec  $k \geq 1$ . On se donne donc un ensemble  $\mathcal{N}_h = \{c_i ; i = 1, \dots, N_h\}$  de noeuds du maillage satisfaisant les hypothèses  $(H_0)$ ,  $(H_1)$  et  $(H_2)$  (données pages 55 et 56 ou page 63).*

*On définit  $u_h = \sum_{i=1}^{N_h} u_i \phi_i$  où  $(u_1, \dots, u_{N_h})$  est solution du problème (FV) $_h$  donné page 60.*

*Alors, la méthode des éléments finis converge,*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} = 0,$$

*de plus cette méthode est d'ordre au moins  $k$ , c'est à dire qu'il existe une constante  $C$ , ne dépendant pas de  $h$ , telle que si la solution est dans  $H^{k+1}(\Omega)$ , on a*

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C h^k \|u\|_{H^{k+1}(\Omega)}.$$

## Bibliographie

- [1] H. Brezis, Analyse fonctionnelle, Théorie et applications, Masson, 1983.
- [2] R. Dautray & J.L. Lions, Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques, Tomes 1, 2, 7 Masson, 1987.
- [3] G. Dhatt & G. Touzot, Une présentation de la méthode des éléments finis, Les presses de l'Université Laval Québec, 1981.
- [4] A. Ern & J.L. Guermond, Eléments finis : théorie, applications, mise en oeuvre, Springer, 2002.
- [5] J.L. Lions & E. Magenes, Problèmes aux limites non homogènes et applications volume 1, 2 et 3, Dunod, 1968.
- [6] J.C. Nedelec, Notion sur les techniques d'éléments finis, Ellipses, 1991.
- [7] P.A. Raviart & J.M. Thomas, Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles, Masson, 1988.
- [8] M.H. Vignal, Cours équations aux dérivées partielles elliptiques et paraboliques en Master 1 "Mathématiques fondamentales", 2003-2008, notes de cours manuscrites disponibles sur <http://www.math.univ-toulouse.fr/mhvignal/ENSEIGNEMENT/Enseignement.html>.