

ETUDE DU COMPORTEMENT THERMIQUE DES PLAQUES EN MATERIAUX FONCTIONNELLEMENT GRADUES EN UTILISANT UNE THEORIE D'ORDRE ELEVE

Mohamed BOURADA¹, Fouad BOURADA², Fatima BOUNOUARA³, Bouazza FAHSI¹, A.TOUNSI³,

¹ Laboratoire de modélisation et simulation multi-échelles, Université de Sidi Bel Abbès

² Centre Universitaire Belhadj Bouchaib Ain Témouchent-Algérie

³ Laboratoire des Matériaux et Hydrologie, Université de Sidi Bel Abbès

e-mail : med_bourada@yahoo.fr

RÉSUMÉ

L'intérêt de ce travail est l'utilisation d'une nouvelle théorie des plaques à quatre variables pour l'étude du flambement thermique des plaques sandwiches en FGM. Contrairement aux autres théories, la présente méthode donne quatre équations d'équilibre. Le nombre d'inconnues est seulement quatre, contrairement aux autres théories de déformation de cisaillement qui utilisent cinq inconnues. De plus, la présente méthode suppose une variation quadratique et satisfait la nullité de la contrainte de cisaillement transversale dans les surfaces de la plaque. Les propriétés mécaniques telles que le module de Young et le coefficient de dilatation thermique sont supposées être variables à travers l'épaisseur selon une loi de puissance, la couche centrale est en matériau homogène est isotrope. Dans ce travail, cette couche est en céramique. Le chargement thermique est linéaire de température à travers l'épaisseur de la plaque. L'influence des rapports des dimensions, l'indice matériel, le type de chargement et le type de la plaque sur la température critique des flambements est analysé et étudié.

Mots Clés: plaques, théories des plaques, flambement thermique.

NOMENCLATURE

Symboles :

$P^{(n)}$ propriété matériel

$V^{(n)}$ Fraction Volumique

T_{cr} Temperature Critique

γ Facture Non Linéarité

Indices / Exposants :

k Indice materiel

n nombre des couches

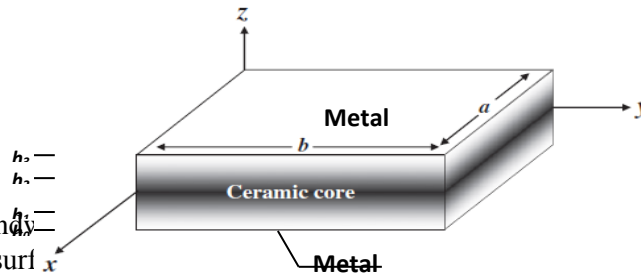
1. INTRODUCTION

L'objet de toute théorie est le calcul approché des grandeurs généralisées sur la base du système d'équations d'équilibre, de compatibilité, de conditions aux limites sur les bords, complété par une loi de comportement reliant les contraintes et les déformations généralisées. Cette partie est consacrée à la modélisation du comportement thermique des plaques sandwiches en « FGM » en utilisant la théorie d'ordre élevé à quatre variables. Contrairement aux autres théories, le nombre de fonctions inconnues dans la présente théorie est seulement quatre, tandis que cinq ou plus dans le cas des autres théories déformation de cisaillement. La théorie présentée est variationnelle (La formulation repose sur le principe des puissances virtuelles), elle a une forte similitude avec la théorie classique des plaques dans de nombreux aspects, n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description parabolique de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres.

On suppose que les propriétés matérielles de la plaque varient sans interruption dans la direction de l'épaisseur selon la distribution de loi de puissance en fonction de la fraction volumique des matériaux constituants.

II. FORMULATION DU PROBLEME

La géométrie et la dimension de la plaque rectangulaire FGM considéré sont représentées dans la figure 1. Les coordonnées cartésienne (x,y,z) sont utilisés pour décrire les déformations infinitésimale de la plaque sandwiches compose de trois couches élastiques occupant les régions [0,a]x[0,b]x[-h/2,h/2] dans la configuration de référence et les axes sont parallèles au bord de la plaque. La plaque a une longueur « a », une largeur « b » et une épaisseur uniforme « h ».



Le plan médian de la plaque sandwiches est au niveau des surfaces extrêmes à $z = \pm h/2$. Les positions verticales de la surface supérieure et inférieure sont désignées respectivement par $h_0 = -h/2$, h_1 , h_2 et $h_3 = h/2$.

Figure 1. Géométrie de la plaque sandwich FGM.

Les propriétés matérielles effectives pour chaque couche telle que le module de Young, le coefficient de poisson et le coefficient de dilatation thermique peuvent être exprimées comme suit

$$P^{(n)}(z) = P_m + (P_c - P_m)V^{(n)} \quad (1)$$

Où $P^{(n)}$ est la propriété matériel effective de la couche "n". P_m et P_c désignent la propriété de la face inférieure et la face supérieure et la couche 1 ($h_0 \leq z \leq h_1$), respectivement, et vice versa de la couche trois ($h_2 \leq z \leq h_3$) en fonction de la fraction volumique $V^{(n)}$ ($n=1,2,3$). On note que P_m et P_c sont respectivement les propriétés correspondantes de métal et céramique de la plaque sandwiches FGM. La fraction volumique $V^{(n)}$ du FGM est supposé varier selon une loi de puissance à travers les directions de l'épaisseur (houari et al, 2011) :

$$V^{(1)} = \left(\frac{z-h_0}{h_1-h_0} \right)^k, \quad z \in [h_0, h_1] \quad (2.a)$$

$$V^{(2)} = 1, \quad z \in [h_1, h_2] \quad (2.b)$$

$$V^{(3)} = \left(\frac{z-h_3}{h_2-h_3} \right)^k, \quad z \in [h_2, h_3] \quad (2.c)$$

Où k est l'exposant de la fraction volumique, qui prend des valeurs supérieures ou égales à zéro. La couche centrale est indépendante de la valeur de k qui est une couche entièrement en céramique. Cependant, la valeur de k est égale à zéro représente une plaque entièrement en céramique. L'hypothèse de la loi de puissance ci-dessus donnée par l'équation (2a) et (2c) reflète la simple loi de mélange utilisée pour les propriétés effectives des faces : métal-céramique et céramique-métal (voir figure 1). On note que la fraction volumique du métal est importante à proximité des surfaces inférieure et supérieure de la plaque et celle de la céramique est élevée au voisinage des interfaces.

II.1 La théorie des plaques raffinée à quatre variables

II.1.1 cinématiques et équations constitutives

En se basant sur les hypothèses de la section précédente, le champ de déplacement peut être obtenu des équations (3-6) comme suit :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ w(x, y, z) &= w_b(x, y) + w_s(x, y) \end{aligned} \quad (3a)$$

Où la forme de la fonction $f(z)$ est donnée par (Mechab et al, 2010 ; Houari et al, 2011) :

$$f(z) = z \left[\frac{-1}{4} + \frac{5}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] \quad (3b)$$

II.1.2 Equations de stabilité

L'énergie potentielle totale de la plaque sandwich FGM peu être écrite comme suit :

$$U = \frac{1}{2} \iiint [\sigma_x^{(n)}(\epsilon_x - \alpha^{(n)}T) + \sigma_y^{(n)}(\epsilon_y - \alpha^{(n)}T) + \tau_{xy}^{(n)}\gamma_{xy} + \tau_{yz}^{(n)}\gamma_{yz} + \tau_{xz}^{(n)}\gamma_{xz}] dx dy dz, \quad (4)$$

Le principe du travail virtuel pour le présent problème est exprimé par

$$\begin{aligned} \iint [N_x \delta \epsilon_x^0 + N_y \delta \epsilon_y^0 + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_y^b \delta k_y^b + M_{xy}^b \delta k_{xy}^b + M_x^s \delta k_x^s \\ + M_y^s \delta k_y^s + M_{xy}^s \delta k_{xy}^s + S_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^s + S_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^s] dx dy = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\text{Où } \begin{Bmatrix} N_x & N_y & N_{xy} \\ M_x^b & M_y^b & M_{xy}^b \\ M_x^s & M_y^s & M_{xy}^s \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})^{(n)} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \end{Bmatrix} dz, \quad (S_{xz}^s, S_{yz}^s) = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} (\tau_{xz}, \tau_{yz})^{(n)} g(z) dz. \quad (6)$$

Où h_n et h_{n-1} sont les cotes des surfaces supérieure et inférieure de la couche "n".

III. SOLUTION ANALYTIQUE DU FLAMBEMENT THERMIQUE

Dans cette partie on s'intéresse à déterminer la solution exacte pour une plaque sandwiches FGM simplement appuyée. Les conditions aux limites suivantes sont imposées pour la présente théorie des plaques à quatre variables aux bords :

$$v_0^1 = w_b^1 = w_s^1 = \frac{\partial w_s^1}{\partial y} = N_x^1 = M_x^{b1} = M_x^{s1} = 0 \text{ at } x = 0, a, \quad (7.a)$$

$$u_0^1 = w_b^1 = w_s^1 = \frac{\partial w_s^1}{\partial x} = N_y^1 = M_y^{b1} = M_y^{s1} = 0 \text{ at } y = 0, b. \quad (7.b)$$

La solution approximative suivante satisfait les équations différentielles et les conditions aux limites :

$$\begin{Bmatrix} u_0^1 \\ v_0^1 \\ w_b^1 \\ w_s^1 \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn}^1 \cos(\lambda x) \sin(\mu y) \\ V_{mn}^1 \sin(\lambda x) \cos(\mu y) \\ W_{bmn}^1 \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \\ W_{smn}^1 \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \end{Bmatrix} \quad (8)$$

$$\Re_{11} = \Re_{22} = \bar{\Re}, \quad \Re_{12} = \nu \bar{\Re}, \quad \Re_{66} = \frac{1-\nu}{2} \bar{\Re}, \quad A_{44}^s = A_{55}^s = \bar{J}, \quad (\Re = A, B, B^s, D, D^s, H^s) \quad (9)$$

Dans ce qui suit la solution de l'équation du déterminant $|K| = 0$ pour les différents types des charges thermique est présentée.

III.1. Flambement des plaques FGM sous une distribution uniforme de la température

La température initiale de la plaque est supposée égale à T_i . La température est uniforme portée à une valeur finale T_f dans la quelle la plaque flambe. Le chargement de la température est $\Delta T = T_f - T_i$. En résolvant le déterminant ci-dessous :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} = 0 \quad (10)$$

On peut facilement déterminer la température critique du flambement ΔT_{cr} comme suit:

$$\Delta T_{cr} = \frac{\Pi^2 \left[(\overline{AD} - \overline{B}^2) \overline{H}_s - \overline{B}_s^2 \overline{D} - \overline{AD}_s^2 + 2\overline{BD}_s \overline{B}_s \right] + a^2 b^2 \Pi (\overline{AD} - \overline{B}^2) \bar{J}}{a^2 b^2 \beta_1 \left[\Pi \left((\overline{H}_s + \overline{D} - 2\overline{D}_s) \overline{A} - (\overline{B}_s - \overline{B})^2 \right) + a^2 b^2 \overline{AJ} \right]} \quad (11)$$

Où
$$\Pi = (a^2 + b^2)\pi^2, \quad \bar{\beta}_1 = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \frac{\alpha^{(n)}(z)E^{(n)}(z)}{1-\nu} dz. \quad (12)$$

III.2 Flambement des plaques FGM sous une variation non uniforme de la température

On suppose que la température de la surface supérieure soit T_t et la température varie de T_t selon une loi de puissance à travers l'épaisseur, à la température de la surface inférieure T_b dans laquelle la plaque flambée. Dans ce cas, la température à travers l'épaisseur est donnée par :

$$T(z) = \Delta T \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^\gamma + T_t, \quad (13)$$

Où la température de flambement $\Delta T = T_b - T_t$ et γ est un exposant de la température ($0 < \gamma < \infty$). On note que la valeur de γ l'égale à l'unité représente une variation linéaire de température à travers l'épaisseur. Tandis que les autres valeurs de γ représentent la variation non linéaire de température à travers l'épaisseur.

$$\Delta T_{cr} = \frac{\Pi^2 \left[(\overline{AD} - \overline{B^2}) \overline{H_s} - \overline{B_s^2} \overline{D} - \overline{AD_s^2} + 2\overline{BD_s B_s} \right] + a^2 b^2 \Pi (\overline{AD} - \overline{B^2}) \overline{J} - T_t \overline{\beta}_1}{a^2 b^2 \overline{\beta}_2 \left[\Pi \left((\overline{H_s} + \overline{D} - 2\overline{D_s}) \overline{A} - (\overline{B_s} - \overline{B})^2 \right) + a^2 b^2 \overline{AJ} \right]} - \frac{T_t \overline{\beta}_1}{\overline{\beta}_2} \quad (14)$$

Où
$$\overline{\beta}_2 = \sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \frac{\alpha^{(n)}(z)E^{(n)}(z)}{1-\nu} \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^\gamma dz. \quad (15)$$

IV. VALIDATION ANALYTIQUE DU MODÈLE PROPOSÉ

Pour illustrer l'approche proposée, une plaque sandwich FGM (céramique-métal) est considérée. La combinaison de matériaux est constituée de titane (Zirconium).

Dans ce qui suit, nous notons que plusieurs type de plaque sandwich sont utilisées :

- *La plaque sandwich FGM (1-0-1)* : la plaque est symétrique et composée seulement de deux couches FGM d'épaisseur identique, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de couche centrale. Ainsi, $h_1=h_2=0$.
- *La plaque sandwich FGM (2-1-2)*: la plaque est symétrique et nous avons $h_1=-h/10, h_2=h/10$.

Le facteur de correction de cisaillement pour FSDPT est égal à 5/6. Pour la distribution linéaire et non linéaire de température à travers l'épaisseur $T_t = 25 \text{ }^\circ\text{C}$.

Pour montrer aussi la validité de la présente théorie, des résultats ont été obtenus pour des plaques sandwich FGM. Sous des distributions linéaires de la température en utilisant plusieurs théories. La température critique de flambement ($T_{cr} = 10^{-3} \Delta T_{cr}$) est considérée pour $k = 0, 1, 2, 5, 10$, et ∞ (métal). On constate que la température critique de flambement croît avec l'augmentation de l'épaisseur des couches FGM et en particulier pour $k \geq 1$. Pour les différents indices matériels k .

La figure 1 montre l'effet de l'indice matériel k sur la température critique de flambement T_{cr} pour différents types de plaques sandwich sur une distribution linéaire de la température à travers l'épaisseur en utilisant la présente théorie à quatre variables. Il est clair que la température critique de flambement T_{cr} pour les plaques sous une distribution non linéaire de température est supérieure que celle des plaques sous une répartition uniforme de température. Cependant T_{cr} pour les plaques sous chargement linéaire de température est intermédiaire entre les deux cas précédents de chargement thermique.

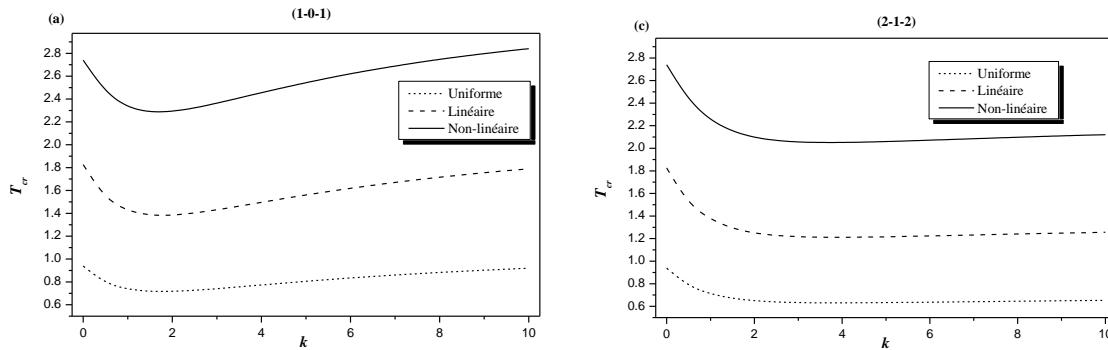


Figure. 1: Variation de température critique de flambement T_{cr} en fonction de l'indice de loi de puissance k pour différents types de plaques sandwichées carrées FGM ($a/h=10$) : (a) et (c) en plaque sandwichée FGM pour un facteur de non linéarité $\gamma=2$.

La figure 2 montre les effets du rapport de dimension (b/a) sur la température critique de flambement des plaques sandwichées FGM sous différent type de chargement thermique. On voit que, quelque soit le type de la plaque sandwichée, la température critique de flambement diminue graduellement avec l'augmentation du rapport (b/a) pour tous les types de chargement thermique. On remarque aussi à partir de la figure 2 que (T_{cr}) augmente avec le paramètre (γ)

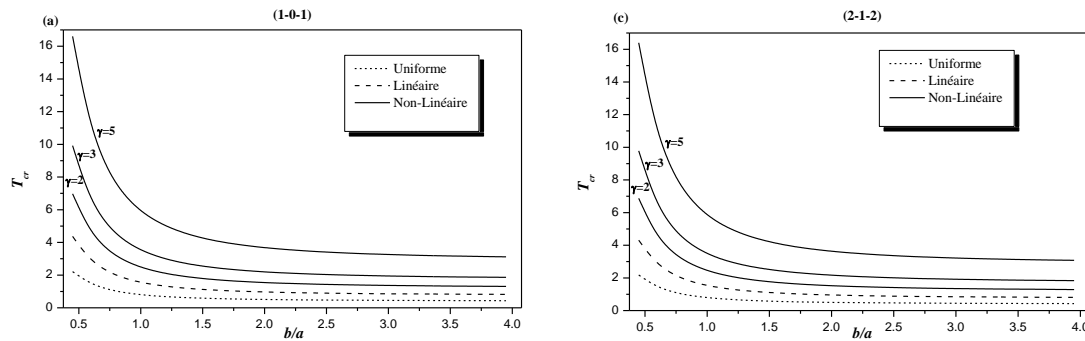


Figure. 2 : Variation de la température critique de flambement T_{cr} en fonction du rapport b/a des différents types de plaques (FGM) sandwichées carrées ($k=1$; $a/h=10$) : la plaque (a) et (c) : plaque FGM sandwichée

V. CONCLUSION

Les températures critiques de flambement des plaques sandwichées FGM simplement appuyées ont été analysées en utilisant une nouvelle théorie des plaques à quatre variables. Le nombre de variables impliquées dans cette théorie est inférieur à celui des théories des plaques de premier ordre et d'ordre élevé. La présente théorie donne une distribution parabolique de la contrainte de cisaillement transversale et satisfait les conditions aux limites de la tension nulle sur les surfaces de la plaque sans utilisation des facteurs de correction de cisaillement. L'analyse de flambement des plaques sandwichées FGM sous différents types de chargement thermique est aussi présentée. Les solutions analytiques pour les températures critiques des flambements de plaque sont déterminées. A travers ce travail on peut conclure :

- La température critique de flambement obtenue en utilisant la présente théorie (avec quatre inconnues) et les autres théories de déformation de cisaillement (avec cinq inconnues) sont presque identiques.

- La température critique de flambement diminue avec l'augmentation de rapport géométrique a/h et du rapport des dimensions d/a .
- La température critique de flambement de plaque sandwich FGM est généralement inférieure que celle des plaques homogène entièrement en céramique.
- La température critique de flambement de la plaque sandwich FGM sous une distribution non linéaire de la température à travers l'épaisseur augmente avec l'exposant de la température γ .

Actuellement, nous pouvons dire que la théorie proposée est exacte et simple pour résoudre les problèmes de flambement thermique des plaques sandwich FGM.

References

1. Ameer, M., Tounsi, A., Mechab, I., AddaBedia, E.A. A new trigonometric shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates resting on elastic foundations. *KSCE Journal of Civil Engineering*, (Accepted) 2011.
2. Houari M.S.A, Benyoucef S., Mechab I., Tounsi A., Addabedia E.A. Two variable refined plate theory for thermoelastic bending analysis of functionally graded sandwich plates. *J. Thermal Stresses*, 34: 315–334, 2011.
3. Mechab I., Ait Atmane H., Tounsi A., Belhadj H. A., Addabedia E.A. A two variable refined plate theory for bending of functionally graded plates. *ActaMech Sin.* 26(6), (2010) 941.
4. Reddy J. N. A simple higher-order theory for laminated composite plates, *J. Appl. Mech.* 51, (1984) 745–752.
5. Reddy J.N. Analysis of functionally graded plates. *Int. J. Numer. Method Eng.* 47, (2000) 663–684.
6. Zenkour A.M, Sobhy M. Thermal buckling of various types of FGM sandwich plates. *Composite Structures*. 93, (2010) 93–102.
7. Zenkour AM. A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: part 1 – deflection and stresses, part 2 – buckling and free vibration. *Int J Solids Struct.* 42, (2005) 5224–58.