

# ETUDE ANALYTIQUE DE LA CONVECTION FORCEE DANS LES MICROTUBES EN UTILISANT LE MODELE D'ECOULEMENT A PISTON

MECILI Mourad<sup>1</sup>, LATRECHE Salah<sup>2</sup>, BOUCHAALA Houda<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Département Génie des Procédés, Université de Constantine 3, 25000 Algérie

<sup>2</sup>Département de Mécanique, Université 20 Août 1955 de Skikda BP 26, 21000 Algérie  
mmourad\_75@yahoo.fr salah.latreche@yahoo.fr houdabouchaala@gmail.com

## RÉSUMÉ

Au cours du présent travail nous aborderons la convection forcée dans un microtube en utilisant le modèle d'écoulement à piston. Dans ce genre de modèle la vitesse du fluide est supposée comme étant constante à travers chaque section droite de la conduite. D'autre part on tiendra en compte l'aspect micro-échelle en incorporant le saut de température à la paroi. La dissipation visqueuse sera négligée et la conduction axiale au sein du fluide sera incluse. L'équation de l'énergie sera analytiquement résolue par la technique de la transformation intégrale finie. On supposera le long de ce travail que la température des parois est constante.

**Mots Clés:** *Convection Forcée, Ecoulement à Piston, Microtube, Technique de la Transformation Intégrale.*

---

## NOMENCLATURE

<b>Symboles :</b>	<b>Lettres grecques :</b>
$F_T$ coefficient d'accommodation thermique	$\alpha$ diffusivité thermique, $m^2s^{-1}$
$Nu$ nombre de Nusselt	$\gamma$ rapport des chaleurs spécifiques
$Pe$ nombre de Peclet	$\lambda$ parcours moyen libre moléculaire, m
$Pr$ nombre de Prandlt	$\theta$ température adimensionnelle
$r$ coordonnée radiale, m	$\psi_i$ fonctions propres
$T$ température, K	$\omega_i$ valeurs propres
$u_0$ vitesse, m/s	<b>Indices / Exposants :</b>
$z$ coordonnée axiale, m	* transformation intégrale
$J_0(.)$ fonction de Bessel	$s$ propriétés du gaz à la surface
	$w$ paroi

---

## 1. INTRODUCTION

L'écoulement glissant et le transfert de chaleur d'un gaz incompressible s'écoulant dans un micro-tube a été étudié par [1-3] :

Larroché et Houssiadas [1] ont analysé le problème de la convection forcée sujette à une condition isotherme, en négligeant la dissipation visqueuse et la conduction axiale, et en tenant en compte les effets de la raréfaction et des coefficients d'accommodations surfaciques (coefficients d'accommodations dynamique et thermique), les auteurs ont supposé que le régime hydrodynamique est complètement développé. Les auteurs [1] ont résolu l'équation de l'énergie par la méthode de séparation des variables basée sur la détermination des fonctions et valeurs propres, les fonctions propres ont été exprimées par le biais de la fonction Hypergéométrique de Kummer noté  ${}_1F_1(\cdot; \cdot; \cdot)$ , tandis que les valeurs propres ont été évaluées par une méthode d'approximation asymptotique du premier ordre appelées WKB (Wentzel, Kramers, and Brillouin). En conclusion les auteurs [1] ont déduit que le transfert de chaleur dépend du degré de raréfaction et des coefficients d'accommodations surfaciques. Leurs résultats ont révélé que la raréfaction augmente le transfert de chaleur dans le cas où l'effet du saut de température est négligeable ou insignifiant ( $\beta < 1$ ) tandis que dans le cas où l'effet du saut de température à la paroi est important ( $\beta > 1$ ), la raréfaction diminue le transfert de chaleur.

Sun et al. [2] ont examiné le transfert de chaleur d'un gaz raréfié, en tenant en compte la dissipation visqueuse, et en appliquant trois types de conditions aux limites : température constante à la paroi, densité de flux constante à la paroi et température à la paroi qui varie linéairement en fonction de la coordonnée axiale. L'équation de l'énergie a été numériquement résolue par la méthode des volumes finis. Les auteurs ont discuté les effets des nombres de Brinkman, de Knudsen et de Prandtl sur le nombre de Nusselt.

Tunc et Bayazitoglu [3] ont analysé la convection thermique en régime stationnaire et laminaire pour un écoulement complètement développé, en incluant le saut de vitesse, le saut de température et la dissipation visqueuse. Les auteurs ont résolu l'équation de l'énergie par la technique de la transformation intégrale. Deux types de conditions aux limites ont été appliqués; température constante à la paroi et densité de flux constante à la paroi. Les auteurs [3] ont illustré l'impact des nombres de Brinkman, Knudsen et Prandtl sur le transfert de chaleur, et ont déduit que le nombre de Nusselt décroît avec l'accroissement du nombre de Knudsen en raison de la présence du saut de température qui réduit le gradient de température normal à la paroi, par conséquent le transfert de chaleur est atténué, tandis que le nombre de Nusselt croît avec l'accroissement du nombre de Prandtl. Les auteurs ont conclu que le saut de vitesse et le saut de température exerce des effets opposés sur le transfert de chaleur.

Les travaux portants sur le phénomène du transfert de chaleur induit par l'écoulement à glissement (slip flow) d'un gaz incompressible et raréfié à travers une micro-conduite formée par deux plaques parallèles, ont été conduits par [4–6].

Aydin et Avci [4] ont mis en évidence le problème de la convection forcée, en incluant la dissipation visqueuse, le saut de vitesse et le saut de température. Ils ont supposé que les régimes hydrodynamique et thermique sont complètement développés. Des conditions aux limites de type isotherme et isoflux ont été appliquées. Les auteurs ont exprimé le profil de température asymptotique et le nombre de Nusselt asymptotique en fonction des nombres de Brinkman, de Brinkman modifié et de Knudsen.

Jeong et Jeong [5] ont étendu le problème de Graetz en incluant les effets des sauts de vitesse et de température à la paroi. Les auteurs ont pris en compte la dissipation visqueuse et la conduction axiale. L'équation de l'énergie a été résolue par la méthode de séparation des variables pour des conditions isotherme et isoflux. Les effets des nombres de Knudsen, de Brinkman et de Peclet sur le transfert de chaleur ont été discutés. Les résultats ont montré que le nombre de Nusselt diminue quand le nombre de Knudsen ou le nombre de Brinkman augmente, et quand le nombre de Peclet diminue.

Mecili et Mezaache [6] ont étudié analytiquement la convection forcée en utilisant le modèle d'écoulement à piston. Dans ce genre de modèle la vitesse du fluide est supposée comme étant constante à travers chaque section droite de la conduite perpendiculaire à l'axe. D'autre part les auteurs ont tenu en compte l'aspect micro-échelle

en incorporant le saut de température à la paroi. La dissipation visqueuse a été négligée et la conduction axiale au sein du fluide a été incluse.

## 2. MODELE MATHEMATIQUE

Dans cette analyse on adoptera l'approche du régime glissant, en tenant en compte uniquement le saut de température à la paroi. **Etant donné que la vitesse est constante, cela implique que la vitesse de glissement ne sera pas prise en compte (ce qui est compatible avec la théorie de l'écoulement à piston).** Le saut de température à la paroi s'exprime comme suit [2]

$$T_s - T_w = -\frac{2 - F_T}{F_T} \frac{2\gamma}{\gamma + 1} \frac{\lambda}{Pr} \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=R} \quad (1)$$

Où:  $T_s$  est la température du gaz à la paroi,  $T_w$  est la température de la paroi,  $\gamma$  est le rapport des chaleurs spécifiques,  $F_T$  est le coefficient d'accommodation thermique,  $Pr$  est le nombre de Prandtl.

Au cours de ce travail, on utilisera une condition aux limites de type isotherme (température constante à la paroi)

Considérant l'écoulement stationnaire et laminaire dans un microtube **très long et de diamètre hydraulique de l'ordre du micro-mètre** avec une vitesse constante notée  $u_0$ , l'effet de compressibilité du gaz sera négligé (en assumant que le nombre de Mach  $< 0.3$ ). En vertu de ces hypothèses, l'équation de l'énergie et les conditions aux limites prennent la forme suivante

$$u_0 \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] \quad 0 \leq r \leq R, \quad 0 < z < +\infty \quad (2)$$

$$T(z = 0, r) = T_0 : 0 \leq r \leq R \quad (3)$$

$$T(r = R) = T_s = T_w - \frac{2 - F_T}{F_T} \frac{2\gamma}{\gamma + 1} \frac{\lambda}{Pr} \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=R} \quad (4)$$

$$\left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=0} = 0 \quad (5)$$

Introduisons les quantités adimensionnelles suivantes:

$$\theta = \frac{T - T_s}{T_0 - T_s}, \quad \sigma = \frac{r}{R}, \quad Z = \frac{z}{R.Pe}, \quad Pe = \frac{u_0(R)}{\alpha} \quad (6)$$

L'équation de l'énergie et les conditions aux limites adimensionnelles s'écrivent comme suit

$$\frac{\partial \theta}{\partial Z} = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \sigma \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} \right) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Z^2} \quad (7)$$

$$\theta(Z = 0, \sigma) = 1 : 0 \leq \sigma \leq 1 \quad (8)$$

$$\theta(\sigma = 1, Z) = 0 \quad (9)$$

$$\left( \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} \right)_{\sigma=0} = 0 \quad (10)$$

Pour résoudre l'équation de l'énergie (eq. 7) sujette aux conditions aux limites (eqs. 8-10), on utilisera la technique de la transformation intégrale. Le problème des fonctions propres se formule à partir de l'équation différentielle ordinaire suivante

$$\frac{d^2\psi_i(\sigma)}{d\sigma^2} + \frac{1}{\sigma} \frac{d\psi_i(\sigma)}{d\sigma} + \omega_i^2\psi_i(\sigma) = 0 \quad (11)$$

Où:  $\Psi_i(\sigma)$  sont les fonctions propres, et  $\omega_i$  sont les valeurs propres.

Les fonctions propres  $\Psi_i(\sigma)$  sont sujettes aux conditions aux limites suivantes:

$$\psi_i(\sigma = 1) = 0 \quad (12)$$

$$\left( \frac{d\psi_i}{d\sigma} \right)_{\sigma=0} = 0 \quad (13)$$

La solution de l'équation différentielle ordinaire (eq. 11) sujette à la condition au limite (eq. 13), nous fournit l'expression des fonctions propres sous la forme suivante

$$\psi_i(\sigma) = J_0(\omega_i\sigma) \quad (14)$$

Tel que :  $J_0(\cdot)$  est la fonction de Bessel de première espèce non modifiée et d'ordre 0.

L'application de la condition au limite (eq. 12) fournit l'équation transcendante:

$$J_0(\omega_i) = 0 \quad (15)$$

Introduisant, maintenant la transformation intégrale (notée  $\theta_i^*(Z)$ ) de la température adimensionnelle  $\theta(\sigma, Z)$

$$\theta_i^*(Z) = \int_0^1 \sigma \psi_i(\sigma) \theta(\sigma, Z) d\sigma \quad (16)$$

La transformation inverse s'écrit sous la forme discrète suivante:

$$\theta(\sigma, Z) = \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{1}{N_i} \right) \psi_i(\sigma) \theta_i^*(Z) \quad (17)$$

Le facteur  $N_i$  s'obtient par l'application de la condition d'orthogonalité définie comme suit

$$\int_0^1 \sigma \psi(\omega_i, \sigma) \psi(\omega_j, \sigma) d\sigma = \begin{cases} 0 & : i \neq j \\ N(\omega_i) & : i = j \end{cases} \quad (18)$$

$$N_i = \int_0^1 \sigma J_0^2(\omega_i\sigma) d\sigma \quad (19)$$

En multipliant les deux membres de l'équation de l'énergie (eq. 7) par  $(\sigma \cdot \Psi)$ , et en intégrant sur le domaine  $0 \leq \sigma \leq 1$ , on obtient:

$$\frac{1}{Pe^2} \frac{d^2\theta_i^*(Z)}{dZ^2} - \frac{d\theta_i^*(Z)}{dZ} - \omega_i^2\theta_i^*(Z) = 0 \quad (20)$$

Avec la condition au limite

$$\theta_i^*(Z = 0) = \int_0^1 \sigma \psi_i(\sigma) d\sigma \quad (21)$$

La solution de l'équation différentielle ordinaire du deuxième ordre (eq. 20), sujette à la condition au limite (eq. 21), est

$$\theta_i^*(Z) = C_i \exp \left[ \frac{ZPe^2(1 - B_i)}{2} \right] \quad (22)$$

$$C_i = \int_0^1 \sigma J_0(\omega_i \sigma) d\sigma \quad , \quad B_i = \sqrt{1 + \frac{4\omega_i^2}{Pe^2}} \quad (23)$$

La substitution de l'équation (22) dans l'équation (17), fournit le profil de température:

$$\theta(\sigma, Z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{C_i \psi_i(\sigma)}{N_i} \exp\left[\frac{ZPe^2(1-B_i)}{2}\right] \quad (24)$$

### 3. RÉSULTATS

Tout les calculs ont été effectués pour: un rapport des chaleurs spécifiques  $\gamma = 1.4$ , nombre de Prandtl  $Pr = 0.7$ , et coefficient d'accommodation thermique  $F_T = 1$ . Pour le régime glissant le nombre de Knudsen  $Kn$  varie entre  $10^{-3}$  et  $0.1$  (voir les Refs [2], [3]), et les valeurs du nombre de Peclet  $Pe$  varient entre 1 et 100. Les valeurs propres  $\omega_i$  sont évaluées à partir de l'équation transcendante (eq. 15), en utilisant la Routine de Mathematica "Find Root", et les quantités propres  $N_i$  et  $C_i$  qui sont définies dans les équations (19, 23) sont évaluées par la Routine "NIntegrate".

La figure 1 illustre l'effet du nombre de  $Pe$  sur le nombre de Nusselt local, dans le cas où l'effet de raréfaction n'est pas pris en compte ( $Kn=0$ ). Cette figure démontre que dans le cas où la conduction axiale au sein du fluide est incluse, le transfert de chaleur conductif assiste le transfert de chaleur convectif, et cette assistance est plus significative quand le nombre de  $Pe$  décroît. D'autre part, cette figure révèle que les nombres de Nusselt locaux (calculés pour différentes valeurs de  $Pe$ ) prennent des valeurs importantes au voisinage de l'entrée de la conduite (région d'entrée thermique), et s'atténuent d'une manière monotone le long de la conduite. On peut aussi observer sur la figure 1 que le nombre de Nusselt local et la longueur de la région d'entrée thermique croient avec le décroissement de  $Pe$ . Au sein de la région thermique complètement développé on remarque que tous les nombres de Nusselt locaux (calculés pour différentes valeurs de  $Pe$ ) convergent vers la même valeur asymptotique à savoir  $Nu_{\infty} = 5.7832$ , en d'autres termes, on peut dire que le nombre de Nusselt complètement développé ne dépend pas du nombre de  $Pe$ .

La figure 2 illustre l'effet de la raréfaction (représenté par  $Kn$ ) sur le nombre de Nusselt local, pour  $Pe=10$ . D'après cette figure, on constate que les courbes des nombres de Nusselt locaux prennent des valeurs extrêmes à l'entrée de la conduite, puis diminuent d'une manière monotone pour atteindre leurs valeurs asymptotiques. On peut noter que le nombre de Nusselt local décroît toujours avec l'augmentation du nombre de Knudsen  $Kn$ . Ce résultat peut être expliqué comme suit : l'écoulement part du régime continu ( $Kn=0$ ) vers le régime glissant ( $0 < Kn \leq 0.1$ ), en causant une réduction du transfert de chaleur à la surface due à la diminution du gradient de température à la surface, et qui est due à l'effet du saut de température à la paroi. Pour récapituler on peut dire que l'augmentation du nombre de  $Kn$  entraîne l'augmentation du saut de température qui conduit à la réduction du gradient de température à la paroi, par conséquent le transfert de chaleur diminue.

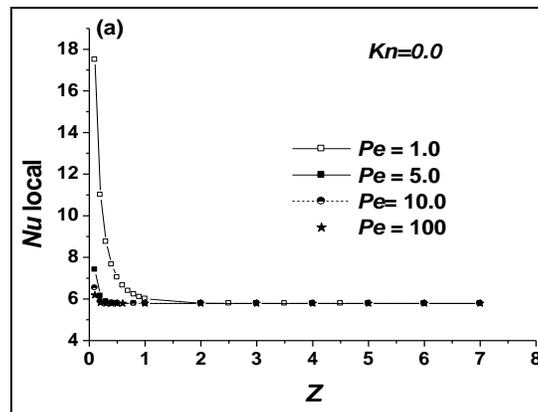


FIGURE 1. Variation axiale du nombre de Nusselt local pour différentes valeurs du

nombre de Peclet  $Pe$ , et pour  $Kn=0.0$ .

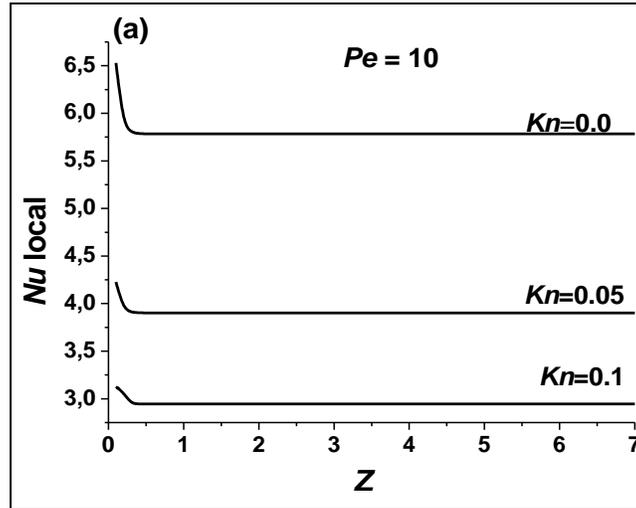


FIGURE 2. Variation axiale du nombre de Nusselt local pour différentes valeurs du nombre de Knudsen  $Kn$ , et pour  $Pe=10$ .

#### 4. CONCLUSIONS

Le présent travail est une étude analytique de la convection forcée dans un microtube en utilisant le modèle d'écoulement à piston en incorporant le saut de température à la paroi et la conduction axiale au sein du fluide. L'équation de l'énergie a été analytiquement résolue par la technique de la transformation intégrale finie qui est basée sur la détermination des fonctions et valeurs propres. Les calculs ont été effectués par le biais des Routines « NIntegrate » et « FindRoot » disponibles sur « Mathematica Software ».

#### REFERENCES

- [1] F.E. Larrodè, C. Housiadas, Slip-Flow heat transfer in circular tubes, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 43, 2669-80, 2000.
- [2] W. Sun, S. Kakaç, A.G. Yazicioglu, A numerical study of single-phase convective heat transfer in microtubes for slip Flow, *Int. J. Thermal Sciences*, 46, 1084-94, 2007.
- [3] G. Tunc, Y. Bayazitoglu, Heat transfer in microtubes with viscous dissipation, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 44, 2395-403, 2001.
- [4] O. Aydin, M. Avci, Analysis of laminar heat transfer in micro-Poiseuille flow, *Int. J. Thermal Sciences*, 46, 30-37, 2007.
- [5] N. Joeng, J.T. Joeng, Extended Graetz problem including streamwise conduction and viscous dissipation in microchannel, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 49, 2151-57, 2006.
- [6] M. Mecili, E.H. Mezaache, Slug Flow-Heat Transfer in Parallel Plate Microchannel Including Slip Effects and Axial Conduction, *Energy Procedia*, 36, 268-77, 2013.