

ANALYSE DYNAMIQUE ET STATIQUE DES POUTRES NON-HOMOGENES EPAISSES AVEC L'UTILISATION DU CONCEPT DE L'AXE NEUTRE.

BOUKHELFI Fouad¹, Bachir BOUIADJRAMohamed¹⁻², KHETIR Abdelhafid¹, TOUNSI Abdelouahed²⁻³

¹Laboratoire des Structures et Matériaux Avancés dans le Génie Civil et Travaux Publics, Université de SIDI BEL ABBES. BP 89 cite Ben M'hidi 22000 SIDI BEL ABBES, Algérie, fouad.boukhelf@hotmail.com

²Agence Thématique de Recherche Scientifique et Technologique. ATRST (Algérie).

³Laboratoire des Matériaux et Hydrologie, Université de SIDI BEL ABBES. BP 89 cite Ben M'hidi 22000 SIDI BEL ABBES.

RÉSUMÉ

Dans ce travail, une nouvelle théorie de déformation de cisaillement des poutres est présentée pour analyser la flexion statique et la vibration des poutres fonctionnellement graduées, La théorie développée considère une vibration d'ordre élevé de la déformation de cisaillement transversal à travers la hauteur de la poutre et satisfait la nullité de la contrainte de cisaillement aux surfaces supérieures et inférieures de la poutre, La position de l'axe neutre est déterminée afin d'éliminer le couplage membrane-flexion. Les propriétés matérielles de la poutre fonctionnellement graduée sont supposées être variées selon une loi de distribution polynomiale de la fraction volumique des constituants.

Mots Clés: *poutre fonctionnellement graduée, théorie des poutres d'ordre élevé, flexion, vibration, axe neutre.*

NOMENCLATURE

Symboles :

L Longueur de la poutre
b Largeur de la poutre
h Hauteur de la poutre
x,y,z Système des coordonnées cartésiennes
u, w Déplacements dans x,z
 z_{ns} Position de l'axe neutre.
C La distance entre l'axe neutre et l'axe médian
E Le module de young
 P_M, P_C Les propriétés du métal et de céramique

Lettres grecques :

σ_x Contrainte normale
 ε_x Déformation.
 γ_{xz} La distorsion
 τ_{xz} Contrainte de cisaillement transversale
 ρ La masse volumique
 ω La fréquence naturelle

Indices / Exposants :

t teps
p L'indice matériel
q La charge transversale

1. INTRODUCTION

Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) sont une classe de composites qui ont une variation continue des propriétés matérielles d'une surface à une autre et cela afin d'éliminer la concentration de contraintes au niveau de l'interface des couches dans les composites stratifiés. Typiquement, un FGM est fabriqué à partir d'un mélange de céramique et de métal de telle sorte que la céramique peut résister à des grandes températures dans les environnements thermiques, alors que le métal peut réduire la contrainte de traction engendrée dans la surface de la céramique dans la phase finale de refroidissement. Les FGM sont largement employés dans la mécanique, l'aérospatial, le nucléaire et le génie civil.

Dans ce travail, une théorie hyperbolique des poutres d'ordre élevé sera présentée pour l'analyse de la flexion et de la vibration des poutres FG en considérant le concept de la position de l'axe neutre. L'utilisation de

cette nouvelle référence (AN) nous permet d'éliminer le couplage membrane-flexion. La théorie proposée satisfait la condition de la contrainte de cisaillement nul au niveau des surfaces supérieures et inférieures de la poutre et ainsi, ne nécessite pas l'utilisation des facteurs de correction de cisaillement. Les propriétés matérielles des poutres FG sont supposées être variées selon une loi de puissance pour la fraction volumique des constituants. Des exemples numériques seront présentés pour montrer la validité et l'exactitude de la présente théorie. Les influences de l'indice de la loi de puissance et la déformation de cisaillement sur les réponses statiques et dynamiques des poutres FG seront examinées.

2. MODELE MATHEMATIQUE

Considérons une poutre FG de longueur L et d'une section transversale rectangulaire de largeur b et de hauteur h . un système de coordonnées cartésiennes (x,y,z) est utilisé dans cette analyse avec l'origine à l'extrémité gauche.

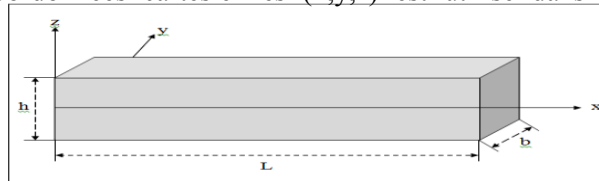


FIGURE .1 :Coordonnées et géométrie d'une poutre en FG.

Avec : $0 \leq x \leq L$; $0 \leq y \leq b$; $-h/2 \leq z \leq h/2$

L'axe x est considéré comme axe indéformable de la poutre. L'axe x coïncide avec l'axe médian de la poutre et l'axe z est perpendiculaire au plan xy . En raison de l'asymétrie des propriétés matérielles des poutres FG par rapport à l'axe médian, les équations de membrane et de flexion sont couplées. Mais si l'origine du système de coordonnées est convenablement sélectionné à travers la direction de l'épaisseur de la poutre FG d'une façon qu'il se positionne sur l'axe neutre, les propriétés matérielles de la poutre FG seront symétriques par rapport à cette référence. Pour spécifier la position de l'axe neutre des poutres FG ; de différentes références sont considérées pour la mesure de z à savoir z_{ms} et z_{ns} mesurés à partir de l'axe médian et l'axe neutre de la poutre comme est montré dans la figure 2.

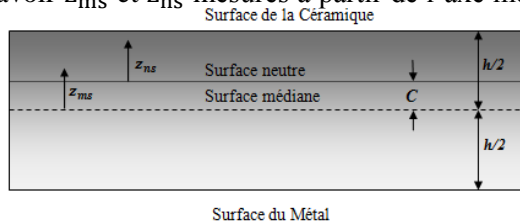


FIGURE .2:La position de l'axe médiant et de l'axe neutre pour une poutre fonctionnellement graduée (Bourada, 2015).

La fraction volumique de la céramique V_c est exprimé en se basant sur les coordonnées z_{ms} et z_{ns} par :

$$V_c = \left(\frac{z_{ms}}{h} + \frac{1}{2} \right)^p = \left(\frac{z_{ns} + C}{h} + \frac{1}{2} \right)^p \quad (1)$$

Les propriétés matérielles de la poutre FG « P » en fonction de la coordonnée de l'épaisseur deviennent :

$$P(z) = P_M + P_{CM} \left(\frac{z_{ns} + C}{h} + \frac{1}{2} \right)^p, \quad P_{CM} = P_C - P_M \quad (2)$$

La position de l'axe neutre de la poutre FG est déterminée à partir de (Bouremana et al, 2013 ; Ould Larbi et al, 2013 ; Yahoobi et Feraidoon, 2010) :

$$\int_{-h/2}^{h/2} E(z_{ms})(z_{ms} - C) dz_{ms} = 0 \quad (3)$$

Par conséquent, la position de l'axe neutre peut être obtenue par :

$$C = \frac{\int_{-h/2}^{h/2} E(z_{ms})z_{ms}dz_{ms}}{\int_{-h/2}^{h/2} E(z_{ms})dz_{ms}} \quad (4)$$

Le champ de déplacement de la présente théorie est donné par :

$$u(x, z_{ns}, t) = u_0(x, t) - (z_{ns} + C) \frac{dw_b}{dx} - f(z_{ns} + C) \frac{dw_s}{dx} \quad (5-a)$$

$$v(x, z_{ns}, t) = 0 \quad (5-b)$$

$$w(x, z_{ns}, t) = w_b(x, t) + w_s(x, t) \quad (5-c)$$

Les déformations non nulles sont données :

$$\varepsilon_x = \frac{du_0}{dx} - (z_{ns} + C) \frac{d^2w_b}{dx^2} - f(z_{ns} + C) \frac{d^2w_s}{dx^2} \quad (6a)$$

$$\gamma_{xz} = \left(1 - \frac{df}{d(z_{ms})}\right) \frac{dw_s}{dx} \equiv g(z_{ns} + C) \frac{dw_s}{dx} \quad (6b)$$

Où $g(z_{ms}) = 1 - \frac{df(z_{ms})}{d(z_{ms})}$ est la fonction de forme de la déformation de cisaillement transversal.

La fonction de gauchissement proposée est la suivante :

$$f(z) = \frac{\frac{h \sinh\left(\frac{\pi(z_{ns}+C)}{h}\right)}{\pi} - (z_{ns}+C)}{\cosh\left(\frac{1}{2}\pi\right) - 1} \quad (7)$$

Les relations constitutives linéaires des poutres FG peuvent être écrites comme :

$$\sigma_x = Q_{11}(z)\varepsilon_x; \quad \sigma_{xz} = Q_{55}(z)\gamma_{xz} \quad (8)$$

$$\text{Tels que: } Q_{11}(z) = E(z_{ms}); \quad Q_{55}(z) = \frac{E(z_{ms})}{2[1+\nu(z)]} \quad (9)$$

les équations de mouvement sont obtenues en utilisant le principe d'Hamilton (Reddy, 2002) :

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} (\delta U + \delta V - \delta K) dt \quad (10)$$

Où test le temps ; t_1 et t_2 sont le temps initial et final respectivement ; δU est la variation virtuelle de l'énergie de déformation ; δV est la variation virtuelle du travail des forces extérieures et δK est la variation virtuelle de l'énergie cinétique.

La solution de Navier est utilisée pour déterminer les solutions analytiques pour les poutres simplement appuyées. La solution est supposée comme suit :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n e^{i\omega t} \cos \alpha x \quad (11-a)$$

$$w_b(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_{bn} e^{i\omega t} \sin \alpha x \quad (11-b)$$

$$w_s(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_{sn} e^{i\omega t} \sin \alpha x \quad (11-c)$$

Où $i = \sqrt{-1}$, $\alpha = n\pi/L$, (U_n, W_{bn}, W_{sn}) sont des inconnus qui représentent les amplitudes, et ω est la fréquence naturelle. La charge transversale q est aussi développée en série de Fourier comme suit :

$$q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \sin \alpha x; \quad Q_n = \frac{4q_0}{n\pi} (n = 1,3,5, \dots) \quad (12)$$

En substituant les expressions de u_0, w_b, w_s et q à partir des équations (11) dans les équations de mouvement (10), les solutions analytique peuvent être obtenues sous la forme condensée suivantes :

$$\left(\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{12} & m_{22} & m_{23} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} U_n \\ W_{bn} \\ W_{sn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ Q_n \\ Q_n \end{Bmatrix} \quad (13)$$

$$\text{Où : } s_{11} = A\alpha^2, \quad s_{12} = 0, \quad s_{13} = -B_s\alpha^3, \quad s_{22} = D\alpha^4, \quad s_{23} = D_s\alpha^4,$$

$$s_{33} = H_s\alpha^4 + A_s\alpha^2, \quad m_{11} = I_0, \quad m_{12} = -I_1\alpha, \quad m_{13} = -J_1\alpha, \quad (14)$$

$$m_{22} = I_0 + I_2\alpha^2, \quad m_{23} = I_0 + J_2\alpha^2, \quad m_{33} = I_0 + K_2\alpha^2.$$

3. RESULTATS

Pour les résultats numériques, une poutre Al/Al₂O₃ composée d'aluminium (comme le métal) et d'alumina (comme la céramique) est considérée. Les propriétés matérielles de l'aluminium sont $E_m = 70$ GPa, $V_m = 0.3$ et $\rho_m = 2702$ kg/m³, et celles de l'alumina sont $E_c = 380$ GPa, $V_c = 0.3$ et $\rho_c = 3960$ kg/m³ (Simsek, 2010). Pour interpréter les résultats trouvés, Poutre homogène ($p=0$), Poutre fonctionnellement graduée ($p=1$) on a utilisé les quantités adimensionnelles suivantes :

$$\bar{w} = 100 \frac{E_m h^3}{q_0 L^4} w \left(\frac{L}{2} \right); \quad \bar{u} = 100 \frac{E_m h^3}{q_0 L^4} u \left(0, -\frac{h}{2} \right); \quad \bar{\sigma}_x = \frac{h}{q_0 L} \sigma_x \left(\frac{L}{2}, \frac{h}{2} \right); \quad \bar{\tau}_{xz} = \frac{h}{q_0 L} \sigma_{xz} (0,0); \quad \bar{\omega} = \frac{\omega L^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}} \quad (15)$$

A-Analyse statique : Les valeurs calculées par les différentes théories sont obtenues en utilisant 100 termes dans les séries de l'équation (12). On a constaté que les valeurs obtenues par les différentes théories de déformation de cisaillement basées sur le concept de l'axe neutre sont en accord avec celles données par Li et al (2010) pour toutes les valeurs de l'indice matériel \mathbf{p} et du rapport $\mathbf{L/h}$. il est remarqué aussi que la CBT sous-estime la flèche pour des poutres modérément épaisses ($\mathbf{L/h=5}$) et cela est dû à la négligence de l'effet de déformation de cisaillement par la CBT.

Les figures 3montrent les variations du déplacement axial \bar{u} , la contrainte axiale $\bar{\sigma}_x$ et la contrainte de cisailment transversal $\bar{\tau}_{xz}$ respectivement à travers l'épaisseur d'une poutre très épaisse ($L=2h$) sous un chargement uniforme. En général, toutes les théories de déformation de cisailment donnent presque les mêmes résultats à l'exception de la contrainte $\bar{\tau}_{xz}$ où des légères différences sont apparues. Cela peut être expliqué par la forme différente des fonctions $g(z)$ utilisées dans chaque modèle.

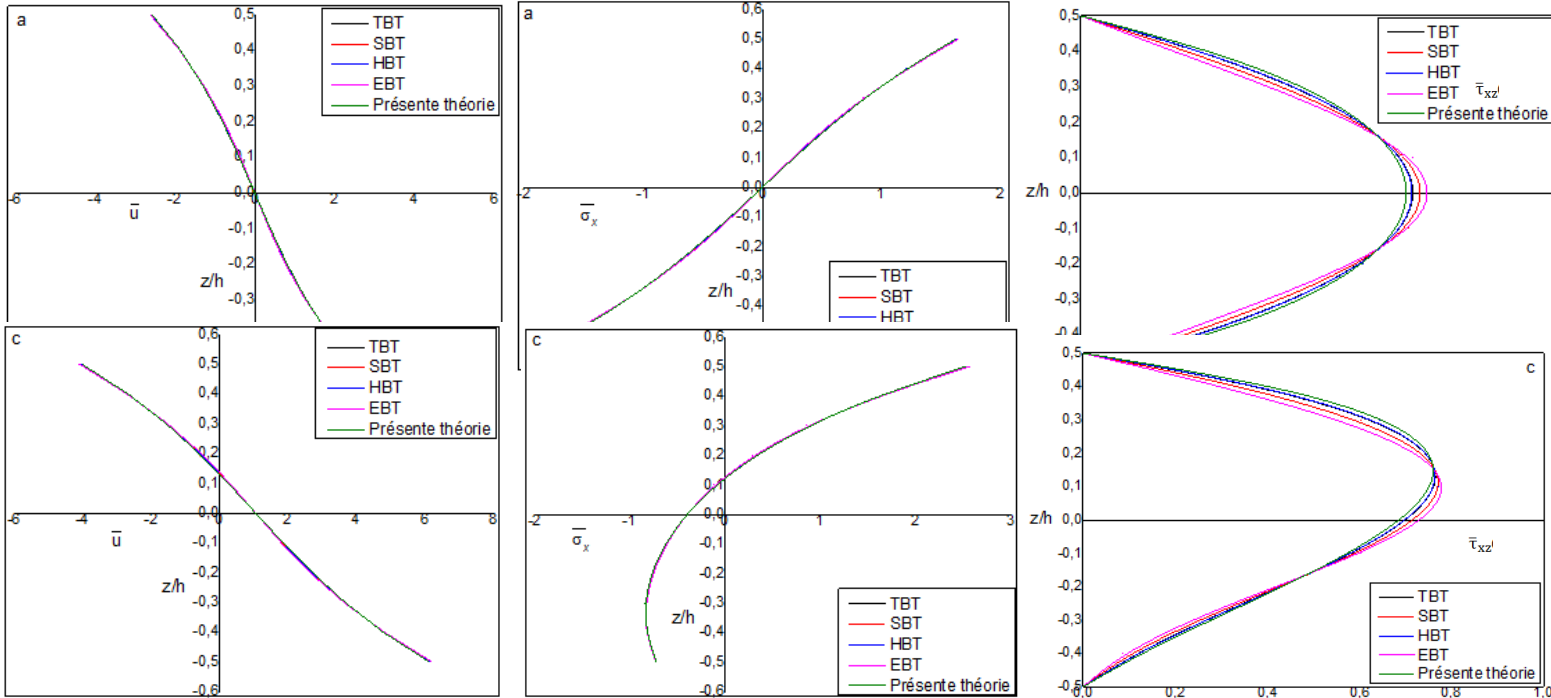
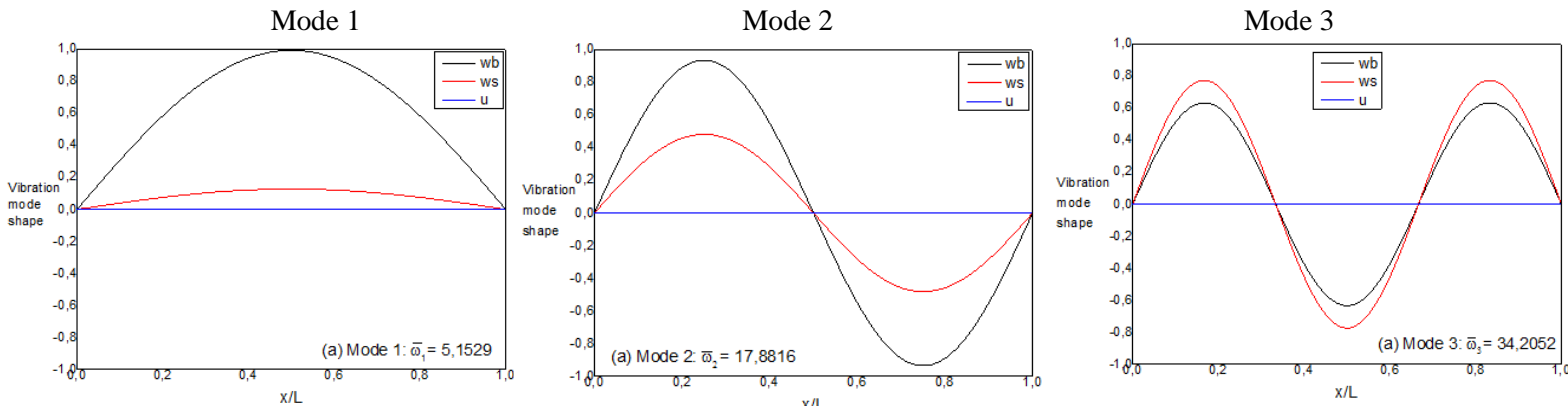
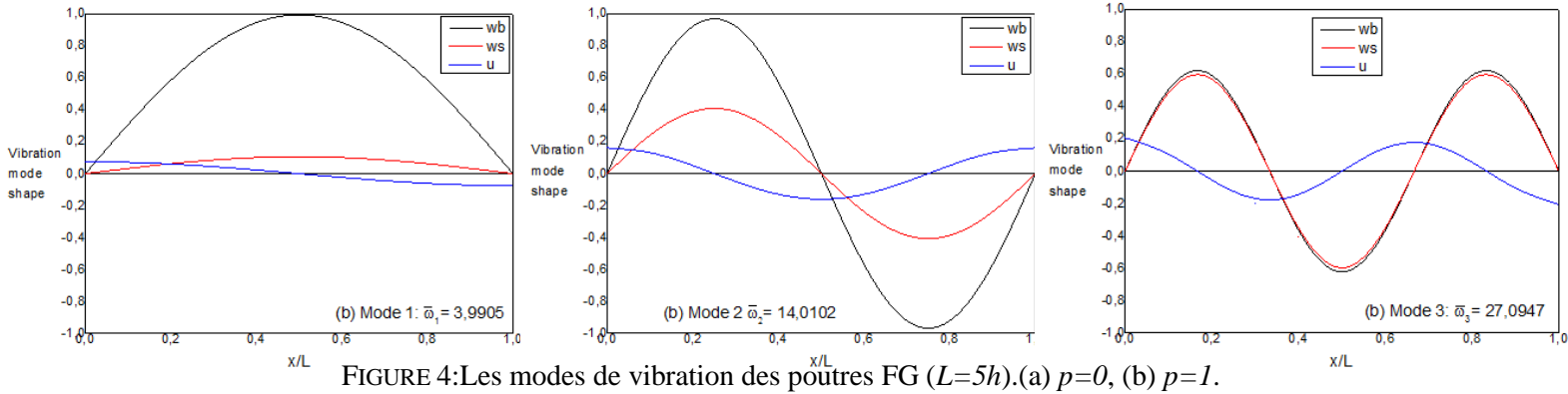


FIGURE.3:Variation des déplacements axiaux non-dimensionnels $\bar{u}(0, z)$, la contrainte normale non-dimensionnelle $\bar{\sigma}_x(L/2, z)$ et la contrainte de cisailment transversal non-dimensionnelle $\bar{\tau}_{xz}(0, z)$ à travers l'épaisseur des poutres FG sous un chargement uniforme ($L=2h$). (a) $p=0$, (c) $p=1$.

B-Analyse dynamique : Dans la figure 4, on a présenté les trois formes de modes de vibration pour les poutres homogènes et FGM ($L=5h$). Les mesures relatives aux déplacements axiaux et flexionnels montrent que pour le cas d'un matériau homogène, les modes de vibration présentent un mode double couplé (composantes de flexion et de cisailment), alors que, pour le cas d'un matériau FG, la poutre présente un mode supplémentaire (mode axial). La forme du mode résultant est référée à un triple mode couplé axial-flexionnel.





4. CONCLUSIONS

Dans ce travail, une nouvelle théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé basée sur le concept de l'axe neutre a été proposée pour l'analyse statique et dynamique des poutres fonctionnellement graduées. Le champ de déplacement de la théorie des poutres proposée a été choisi sur la base d'un déplacement transversal constant et une variation d'ordre élevé de déplacement axial à travers l'épaisseur de la poutre.

La théorie proposée satisfait les conditions de la nullité des contraintes de cisaillement transversal au niveau des faces supérieures et inférieures ; Le couplage membrane flexion a été éliminé puisque la référence de base a été choisie au niveau de l'axe neutre ; Ainsi que l'augmentation de l'indice matériel a réduit la rigidité des poutres FG et par conséquent a mené à une amplification des flèches et une réduction des fréquences naturelles.

L'inclusion des effets de déformation de cisaillement a mené à une augmentation de la flèche et une réduction des fréquences naturelles.

REFERENCES

- [1] Bourada M, Kaci A, Houari M.S.A, Tounsi A, (2015). A new simple shear and normal deformations theory for functionally graded beams. *Steel and composite structures*, vol 18 N° 2 PP 409 –423,ISSN 1229–9367.
- [2] S, Reddy JN, Chakraborty A, Gopalakrishnan (2003). A new beam finite element for the analysis of functionally graded materials. *Int J Mech Sci*; 45(3): 519–39.
- [3] Simsek M, (2009). Static analysis of a functionally graded beam under a uniformly distributed load by Ritz method. *Int J Eng Appl Sci*; 1(3):1–11.
- [4] Simsek M, Kocaturk T, (2009). Free and forced vibration of a functionally graded beam subjected to a concentrated moving harmonic load. *Compos Struct*; 90(4):465–73.
- [5] Li XF, Wang BL, Han JC, (2010). A higher-order theory for static and dynamic analyses of functionally graded beams. *Arch Appl Mech*; 80(10):1197–212.