

## ANALYSE DU COMPORTEMENT THERMIQUE DES PLAQUES SANDWICHES EN FGM

HAMIDI Ahmed<sup>1</sup>, ZIDOUR Mohamed<sup>2</sup>, TOUNSI Abdelouahed<sup>3</sup>, ADDA BEDIA El Abbas<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Université Ibn khaldoun, BP 78 zaâroura 14000 Tiaret Algérie, hamidiahmed82@yahoo.fr

<sup>2</sup>Université Ibn khaldoun, BP 78 zaâroura 14000 Tiaret Algérie, zidour.mohamed@yahoo.com

<sup>3</sup>Université Djillali LIABES, BP 89 22000 Sidi-Bel-Abbès Algérie, tou.abdel@yahoo.fr

<sup>4</sup>Université Djillali LIABES, BP 89 22000 Sidi-Bel-Abbès Algérie, adda.bed@yahoo.com

### RÉSUMÉ

Le comportement thermomécanique des plaques sandwiches fonctionnellement graduées est étudié en utilisant une nouvelle théorie des plaques à quatre variables. Contrairement aux autres théories, le nombre d'inconnus impliqués dans cette théorie est seulement quatre. La présente théorie est variationnellement consistante, n'exige pas le facteur de correction de cisaillement et mène à une variation parabolique de la contrainte de cisaillement transversale à travers l'épaisseur de la plaque. De plus, cette théorie assure la nullité de la contrainte de cisaillement dans les surfaces supérieure et inférieure de la plaque. Les peaux de la plaque sandwich sont constituées d'un mélange de deux matériaux différents distribués à travers l'épaisseur où les propriétés matérielles sont supposées variables selon une loi de distribution polynomiale en fonction des fractions volumiques des constituants. La validité de la présente théorie est vérifiée en comparant les résultats déterminés par cette théorie à ceux obtenus par la théorie de premier ordre et les autres théories d'ordre élevé.

**Mots Clés:** *Plaques, thermomécanique, modélisation analytique, matériaux à gradient de propriétés.*

---

### NOMENCLATURE

#### Symboles :

V (z)	Fraction volumique
h	Epaisseur de la plaque
u, v, w	Les déplacements dans les directions x, y, z
E	module de Young
G	module de cisaillement
Q	effort de cisaillement

#### Lettres grecques :

$\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$	Les rotations autour des axes x, y et z
$\Psi(z)$	Fonction de gauchissement
$\sigma$	contrainte normale
$\tau$	contrainte de cisaillement
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	déformation dans la direction x, y et z
$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}$	déformations de distorsion

---

### 1. INTRODUCTION

Au cours de ces dernières années, l'industrie et l'usage mondial des matériaux composites ont bénéficié d'une croissance rapide et régulière, soutenue en particulier par la diversité des applications. Les propriétés physiques d'un matériau composite sont complètement différentes de celles de leurs composantes. La matrice a généralement pour rôle mécanique de fournir une certaine cohésion entre les différents éléments de renfort. Mais

l'optimisation locale des propriétés de ce mélange, par association d'un matériau de haute dureté à la surface d'un matériau tenace par exemple, pose alors le problème de l'interface.

Cette transition brutale de composition peut générer localement de fortes concentrations des contraintes. La solution d'une transition continue des propriétés recherchées, par un gradient de composition, permet d'atténuer cette singularité par l'utilisation des matériaux à gradient de propriétés (en anglais : Functionally Graded Material " F.G.M ").

Il est bien connu que les matériaux à gradient de propriétés sont très utilisés pour les pièces de structure et pour des équipements de protection thermique. Le chargement thermique auquel sont soumises certaines de ces structures, et les contraintes thermiques qui en résultent, jouent un rôle très important dans la ruine de ces structures [1].

Il est donc essentiel de disposer de moyens de calcul, les plus efficaces et précis possible, qui respectent les lois de la physique, afin d'étudier l'influence du chargement thermique sur le comportement mécanique des structures sandwiches en matériaux à gradient de propriétés et en déduire l'évolution des déplacements, des déformations et les contraintes normales et tangentielles thermomécanique liées à un chargement thermique donné en chaque point de la structure.

Dans ce papier, une théorie des plaques à quatre variables est développée pour la flexion thermomécanique des plaques sandwiches en FGM. La plaque est supposée isotrope à n'importe quel point dans son volume, avec un module de Young variant à travers l'épaisseur selon une loi de puissance en fonction de la fraction volumique des constituants de la plaque. Tandis que, le coefficient de Poisson est supposé constant. La présente théorie satisfait aux conditions d'équilibre dans les faces supérieure et inférieure de la plaque sans l'utilisation des facteurs de correction de cisaillement. La solution de Navier est utilisée pour obtenir les solutions analytiques pour les plaques FGM simplement appuyées. Les effets de la variation de la fraction volumique des matériaux constituants et du rapport épaisseur-longueur sur les flèches, les déplacements axiaux et les distributions de la contrainte axiale sont étudiés en détail. Des résultats numériques pour les flèches et les contraintes ont été étudiés et des exemples numériques sont présentés pour illustrer la précision et l'efficacité de la présente théorie en comparant les résultats obtenus avec ceux déterminés par d'autres théories.

## 2. MODELE MATHEMATIQUE/METHODE EXPERIMENTALE

### 2.1 Configuration géométrique

Considérons une plaque sandwich en FGM de forme rectangulaire avec une épaisseur uniforme liée à un système de coordonnées rectangulaires (x, y, z).

Les faces supérieure et inférieure de la plaque sont à  $z = \pm h/2$ , et les bords de la plaque sont parallèles aux axes x et y.

La plaque sandwich est composée de trois couches élastiques: " couche 1", " couche 2" et " couche 3" du bas vers le haut de la plaque (Figure 1). Les ordonnées verticales de la face inférieure, les deux interfaces, et de la face supérieure de la plaque sont notées par:  $h_1 = -h/2, h_2, h_3, h_4 = h/2$ , respectivement. Le volume et la surface supérieure qu'est soumise à une charge transversale  $q(x, y)$ , sont notés par  $V$  et  $\Omega$ , respectivement. Pour des raisons simplificatrices, le rapport de l'épaisseur de chaque couche de bas vers le haut de la plaque est noté par la combinaison de trois chiffres, par exemple "1-0-1", "2-1-2" et ainsi de suite.

On suppose que la fraction volumique des plaques FGM obéit à une loi de puissance à travers l'épaisseur :

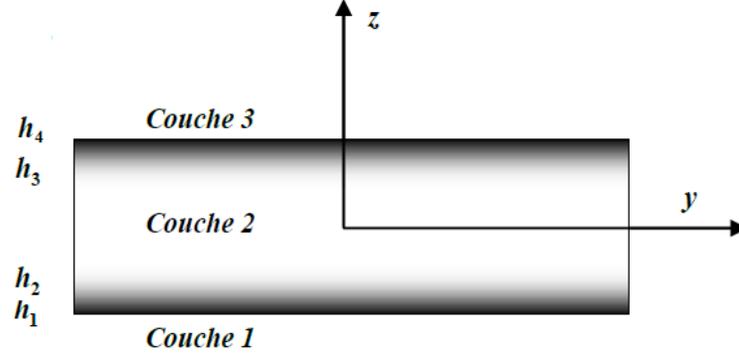


FIGURE 1. La variation du matériau à travers l'épaisseur pour une plaque sandwich en FGM.

$$V^{(1)} = \left( \frac{z - h_1}{h_2 - h_1} \right)^k, \quad z \in [h_1, h_2] \quad (1a)$$

$$V^{(2)} = 1, \quad z \in [h_2, h_3] \quad (1b)$$

$$V^{(3)} = \left( \frac{z - h_4}{h_3 - h_4} \right)^k, \quad z \in [h_3, h_4] \quad (1c)$$

Où  $V^{(n)}$ , ( $n = 1, 2, 3$ ) désigne la fonction de la fraction volumique de la couche  $n$ ;  $k$  est l'indice de la fraction volumique, qui indique le profil de la variation matérielle à travers l'épaisseur. Les propriétés matérielles, comme le module de Young  $E$ , le coefficient de Poisson  $\nu$ , le coefficient de dilatation thermique  $\alpha$ , peuvent être exprimées par la loi de mélange:

$$P^{(n)}(z) = P_m + (P_c - P_m)V^{(n)} \quad (2)$$

Où  $P^{(n)}$  est la propriété de matérielle effective de la couche  $n$ .  $P_m$  et  $P_c$  correspondent à la propriété des faces inférieure et supérieure respectivement de la couche 1 ( $h_1 \leq z \leq h_2$ ), et vice versa pour la couche 3 ( $h_3 \leq z \leq h_4$ ), selon la fraction de volume  $V^{(n)}$  ( $n = 1, 2, 3$ ). On Note que  $P_m$  et  $P_c$  sont, respectivement, les propriétés correspondantes au métal et à la céramique de la plaque sandwich FGM. Pour plus de simplicité, dans cette étude le coefficient de poisson de la plaque est supposé constant. Cela est dû au fait que l'influence de ce coefficient sur la déformation est très petite par rapport à celle du module de Young.

## 2.2 La théorie des plaques d'ordre élevé

Le champ de déplacement d'un point matériel de la plaque et de coordonnées  $(x, y, z)$  peut être écrit comme suit :

$$u = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + \Psi(z) \theta_x \quad (3a)$$

$$v = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + \Psi(z) \theta_y \quad (3b)$$

$$w = w_0(x, y) \quad (3c)$$

## 2.3 La théorie des plaques raffinée pour les FGM

Contrairement aux autres théories, le nombre de fonctions inconnues dans la théorie raffinée (RPT) actuelle est seulement quatre, alors que les autres théories de déformation de cisaillement [2, 3, 4,5], le nombre d'inconnus est cinq.

### 2.3.1. Hypothèses de la théorie raffinée des plaques (RPT)

Les hypothèses de la RPT sont les suivantes :

- Les déplacements sont petits en comparaison avec l'épaisseur de la plaque, et par conséquent, ces déplacements impliqués sont infinitésimales.
- Le déplacement transversal  $w$  comprend deux composantes :  $w_b$  due à la flexion et  $w_s$  due au cisaillement transverse. Ces composantes sont des fonctions des coordonnées  $x$  et  $y$  seulement.

$$w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) \quad (4)$$

- La contrainte normale transverse  $\sigma_z$  est négligeable par rapport aux contraintes  $\sigma_x$  et  $\sigma_y$ .
- Le déplacement  $u$  suivant la direction  $x$  et  $v$  suivant la direction  $y$  sont constitués de trois composantes : d'extension, de flexion, et de cisaillement.

$$U = u_0 + u_b + u_s, \quad V = v_0 + v_b + v_s \quad (5)$$

Les composants de flexion  $u_b$  et  $v_b$  sont considérées comme semblables aux déplacements donnés par la théorie des plaques classiques. Par conséquent, l'expression de  $u_b$  et  $v_b$  peut être donnée comme suit :

$$u_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial x}, \quad v_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial y} \quad (6)$$

$$u_s = -f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x}, \quad v_s = -f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad (7)$$

### 2.3.2. Cinématique et équations constitutives

En se basant sur les hypothèses formulées dans la section précédente, le champ de déplacement peut être obtenu à l'aide des équations (5) – (8):

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ w(x, y, z) &= w_b(x, y) + w_s(x, y) \end{aligned} \quad (8a)$$

Où :

$$f(z) = z - \Psi(z) \quad \text{et} \quad \Psi(z) = z \left( 1 - 4z^2 / 3h^2 \right) \quad (8b)$$

## 3. RESULTATS

Les propriétés matérielles sont données comme suit :

Métal (Aluminium, Al) :  $E_M = 70 \times 10^9$  N/m<sup>2</sup>;  $\nu = 0.3$ ;  $\alpha_m = 23 \times (10^{-6} / ^\circ\text{C})$ .

Céramique (Alumina, Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>) :  $E_C = 380 \times 10^9$  N/m<sup>2</sup>;  $\nu = 0.3$ ;  $\alpha_c = 7.4 \times (10^{-6} / ^\circ\text{C})$ .

Les paramètres non dimensionnelles suivant sont utilisés :

La flèche centrale :  $\bar{w} = 10^3 / [(q_0 a^4 / (E_0 h^3)) + ((10^3 \alpha_0 \bar{T}_2 a^2) / h)] w(a/2, b/2)$

La contrainte axiale :  $\bar{\sigma}_x = 10 / q_0 a^2 / [(h^2) + (10 E_0 \alpha_0 \bar{T}_2 a^2) / h^2] \sigma_x(a/2, b/2, h/2)$

La contrainte de cisaillement :  $\bar{\tau}_{xz} = 1 / [q_0 a / (h) + (E_0 \alpha_0 \bar{T}_2 a) / 10h] \tau_{xz}(0, b/2, 0)$

La coordonnée d'épaisseur :  $\bar{z} = z / h$

Où les valeurs de références des propriétés sont prises comme  $E_0 = 1 \text{ GPa}$  et  $\alpha_0 = 10^{-6} / ^\circ\text{C}$ .

Les Figures 2 et 3 représentent les variations de la contrainte axiale  $\bar{\sigma}_x$  et la contrainte de cisaillement  $\bar{\tau}_{xz}$  à travers l'épaisseur pour les plaques symétriques en FGM ( $k = 1.5$ ) en utilisant diverses théories de déformation de cisaillement. Il est également à noter que la présente théorie et la théorie TSDPT se coïncident.

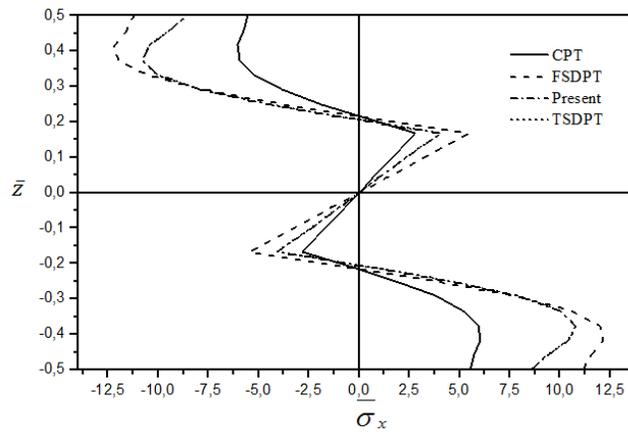


FIGURE 2. Comparaison de la variation de contrainte adimensionnelle axiale  $\bar{\sigma}_x$  à travers l'épaisseur des plaques en FGM symétrique (1-1-1) en appliquant différentes théories de déformation de cisaillement

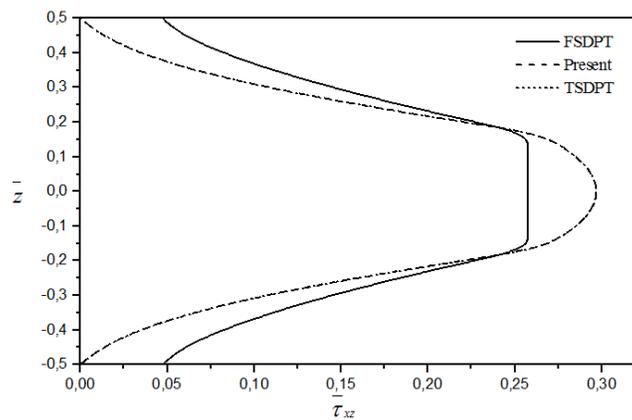


FIGURE 3. Comparaison de la variation de contrainte adimensionnelle axiale  $\bar{\tau}_{xz}$  à travers l'épaisseur des plaques en FGM symétrique (1-1-1) en appliquant différentes théories de déformation de cisaillement

La Figure 4 représente la variation de la flèche centrale  $\bar{w}$  en fonction du rapport  $a/h$  pour la plaque sandwichs en FGM (1-1-1). la flèche pour une composition riche en métal est plus grande par rapport à celle d'une plaque riche en céramique. Cela est due du fait que le module de Young pour le céramique ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ; 380 GPa) étant élevé par rapport à celui du métal (Al; 70 GPa). Par conséquent, pour les plaques en FGM, la flèche (transversale) diminue à mesure que l'indice de la loi de puissance  $k$  est diminué, de même si le rapport  $a/h$  augmente.

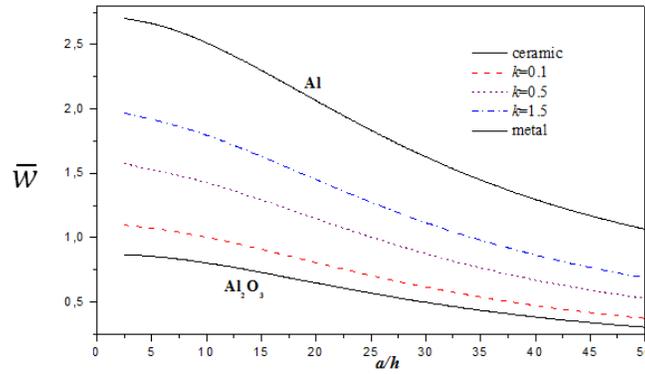


FIGURE 4. variation de la flèche  $\bar{w}$  en fonction du rapport  $(a/h)$  d'une plaque sandwich en FGM (1-1-1) pour diverses valeurs de  $k$

#### 4. CONCLUSIONS

Dans le cadre de cette étude, une théorie à quatre variables (RPT) a été développée pour étudier le comportement thermomécanique des plaques simplement appuyées en FGM. la présente théorie utilise seulement quatre équations d'équilibre, avec un calcul moins consistant en comparaison avec les autres théories d'ordre élevé connues dans la littérature qui nécessitent un nombre important d'équations d'équilibre.

les plaques entièrement en céramique auront les plus petites flèches ainsi que les plus petites contraintes de cisaillement transversal. Les gradients des propriétés des matériaux jouent un rôle important dans la détermination de la réponse des plaques FGM.

Toutes les comparaisons effectuées ont démontrées que les déformations et les contraintes obtenues en utilisant la théorie actuelle raffinée (avec quatre inconnues) et les autres théories d'ordre élevé (avec cinq inconnues) sont presque identiques. Par conséquent, on peut dire que la présente théorie (RPT) est non seulement exacte mais aussi simple pour étudier le comportement thermomécanique en flexion des plaques en FGM.

#### REFERENCES

- [1] T.A. Anderson, "A 3-D elasticity solution for a sandwich composite with functionally graded core subjected to transverse loading by a rigid sphere," *Compos Struct*, vol. 60, pp. 265–274, 2013.
- [2] M. Bachir Bouiadjra, E.A. Adda Bedia, and A. Tounsi, "Nonlinear thermal buckling behavior of functionally graded plates using an efficient sinusoidal shear deformation theory," *Structural Engineering and Mechanics*, vol. 48, pp. 547 – 567, 2013.
- [3] M. Bachir Bouiadjra, M.S.A. Houari, and A. Tounsi, "Thermal buckling of functionally graded plates according to a four-variable refined plate theory," *Journal of Thermal Stresses*, vol. 35, pp. 677 – 694, 2012.
- [4] K. Bakhti, A. Kaci, A.A. Bousahla, M.S.A. Houari, A.Tounsi, E.A. Adda Bedia, "Large deformation analysis for functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates using an efficient and simple refined theory," *Steel and Composite Structures*, vol. 14(4), pp. 335 – 347, 2013.